Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2018

Analyse Mathématique
Évaluation formative

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai maximum de deux heures.

*Les copies seront reprises lors du cours théorique du **27 novembre**.*

- ***Rédigez vos réponses aux deux questions sur des feuilles séparées.***
- ***Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.***
- ***Indiquez lisiblement votre nom en MAJUSCULES suivi de votre prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.***

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
www.mmm.ulg.ac.be/enseignement/MATH0013/presentation

Question I

Déterminez la solution de l'équation

$$y'''(t) + 4y'(t) = 1 + \sin t$$

vérifiant les conditions initiales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y''(0) = \frac{1}{3}$$

Question II

i. Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions non nulles respectivement paire et impaire sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle
$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$
où $a_0, a_1 \in C_0(]-1,1[)$. La solution générale de cette équation sur $]-1,1[$ peut-elle s'écrire sous la forme
$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$
où A et B sont des constantes quelconques ? Justifiez.

ii. Pour chacun des problèmes différentiels suivants, déterminez si une solution existe et, dans l'affirmative, si celle-ci est unique sur $]-1,1[$:

(a) $y''' + f(x)y' + y = \mathrm{e}^{-x}$; $y''(0) = y(0) = 3$ où $f(x) \in C_0(\mathbb{R})$.

(b) $xy'' + 2\mathrm{e}^x y' + \dfrac{y}{1+x^2} = 1 + x$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 0$.

SOLUTION TYPE

Question I

L'équation différentielle ordinaire

$$y'''(t)+4y'(t)=1+\sin t$$

Décomposition (annoncée ou mise en oeuvre) de la solution : 2 pts dont 1 pt pour la justification par la linéarité.

est d'ordre 3, linéaire et à coefficients constants. Vu la linéarité, sa solution générale est la somme de la solution générale y_h de l'équation homogène et d'une solution particulière y_p de l'équation complète, soit

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

i. ***Recherche de*** y_h

Le polynôme caractéristique associé à l'équation homogène est

Polynôme caractéristique : 1 pt

$$L(z)=z^3+4z=z(z^2+4)$$

Il possède trois zéros simples respectivement égaux à 0, $2i$ et $-2i$. De là,

Zéros du polynôme : 1 pt

$$y_h(t)=A+C_1\,\mathrm{e}^{2it}+C_2\,\mathrm{e}^{-2it}$$

ou

Solution y_h sous forme réelle ou complexe : 2 pts

$$y_h(t)=A+B\cos 2t+C\sin 2t$$

où A, C_1, C_2, B et C sont des constantes.

ii. ***Recherche de*** y_p

Principe de superposition : 1 pt

Vu que l'équation est linéaire et que le second membre $1+\sin t$ est de la forme f_1+f_2 avec $f_1(t)=1$ et $f_2(t)=\sin t$, nous recherchons y_p sous la forme $y_{p_1}+y_{p_2}$ où y_{p_i} est solution de

$$y'''(t)+4y'(t)=f_i,\qquad i\in\{1,\,2\}\tag{†}$$

- Par simple examen de l'équation $y'''(t)+4y'(t)=1$, on peut aisément identifier la solution particulière

$$y_{p_1}=\frac{t}{4}$$

Cette solution peut aussi être obtenue systématiquement en utilisant la méthode de l'exponentielle-polynôme puisque le second membre $f_1(t)=1$ est de la forme $\mathcal{P}_n(t)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ avec $n=0$ et $\lambda=0$. Comme $\lambda=0$ est un zéro de multiplicité 1 du polynôme caractéristique $L(z)$ associé à l'équation homogène, on peut rechercher une solution particulière de la forme $y_{p_1}=Kt$ où K est une constante. En substituant dans l'équation (†) pour $i=1$, on trouve

Solution associée au terme “1” : 2 pts

$$0+4K=1\qquad\Rightarrow\qquad K=\frac{1}{4}$$

ce qui conduit au résultat déjà énoncé.

- Vu que i n'est pas zéro de $L(z)$, on peut, sur base de l'application de la méthode de l'exponentielle-polynôme, chercher une solution particulière de $y'''(t)+4y'(t)=\sin t$ de la forme

Solution associée au terme “$\sin t$” : 3 pts (dont 1 pt pour la méthode, en mentionnant explicitement ou non la méthode de l'exponentielle-polynôme)

$$y_{p_2}=K_1\cos t+K_2\sin t$$

où K_1 et K_2 sont des constantes. En substituant cette expression dans l'équation (†) pour $i = 2$, on obtient

$$K_1 \sin t - K_2 \cos t + 4(-K_1 \sin t + K_2 \cos t) = \sin t$$

En identifiant les coefficients de $\cos t$ et $\sin t$, il vient

$$\begin{cases} 3K_2 = 0 \\ -3K_1 = 1 \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} K_2 = 0 \\ K_1 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

de sorte que

$$y_{p_2}(t) = -\frac{\cos t}{3}$$

Remarquons que la présence exclusive de dérivées impaires de la fonction inconnue dans l'équation différentielle et du sinus comme second membre permettait aussi de chercher directement une solution particulière de la forme $y_{p_2} = K_1 \cos t$.

Regroupant les résultats précédents, il vient

$$y_p(t) = \frac{t}{4} - \frac{\cos t}{3}$$

En conclusion, la solution générale de l'équation différentielle est donnée par

Solution générale : 1 pt

$$y(t) = A + B\cos 2t + C\sin 2t + \frac{t}{4} - \frac{\cos t}{3}$$

Les 3 constantes peuvent être déterminées en imposant les conditions de Cauchy, soit

Système pour les 3 constantes : 1 pt

$$y(0) = A + B - \frac{1}{3} = 0$$

$$y'(t) = -2B\sin 2t + 2C\cos 2t + \frac{1}{4} + \frac{\sin t}{3} \quad \text{et} \quad y'(0) = 2C + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y''(t) = -4B\cos 2t - 4C\sin 2t + \frac{\cos t}{3} \quad \text{et} \quad y''(0) = -4B + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Ce système possède l'unique solution

Valeurs de A, B et C : 1 pt

$$A = \frac{1}{3},\ B = 0,\ C = \frac{1}{8}$$

La solution du problème s'écrit donc

Solution du problème sous forme réelle : 1 pt

$$y(t) = \frac{1}{3} + \frac{t}{4} - \frac{\cos t}{3} + \frac{\sin 2t}{8}$$

TOTAL QI : 16 PTS

Question II

i. L'équation donnée étant une équation différentielle linéaire, d'ordre 2, sa solution générale s'écrit sous la forme $Ay_1(x) + By_2(x)$ si les solutions y_1 et y_2 données sont linéairement indépendantes sur $]-1,1[$, c'est-à-dire si

Forme de la solution générale d'une équation linéaire d'ordre 2 : 2 pts

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0, \forall x \in]-1,1[\quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

Définition de l'indépendance linéaire : 2 pts, dont 1 pt pour $\forall x \in]-1,1[$.

Supposons donc que

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0, \quad \forall x \in]-1,1[$$

ce qui entraîne

$$\alpha y_1(-x) + \beta y_2(-x) = 0, \quad \forall x \in]-1,1[$$

Comme y_1 est paire et y_2 impaire, cette dernière équation conduit à

$$\alpha y_1(x) - \beta y_2(x) = 0, \quad \forall x \in]-1,1[$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a donc

$$\begin{cases} \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = 0 \\ \alpha y_1(x) - \beta y_2(x) = 0 \end{cases}$$

Par addition, membre à membre, il vient

$$2\alpha y_1(x) = 0, \quad \forall x \in]-1,1[$$

et, comme il existe au moins un point $x_1 \in]-1,1[$ où y_1 diffère de zéro, $\alpha = 0$.

Par soustraction, membre à membre, il vient

$$2\beta y_2(x) = 0, \quad \forall x \in]-1,1[$$

et, comme il existe au moins un point $x_2 \in]-1,1[$ où y_2 diffère de zéro, $\beta = 0$.

Les fonctions y_1 et y_2 sont donc linéairement indépendantes sur $]-1,1[$ et la solution générale de l'équation peut bien s'exprimer comme proposé dans l'énoncé.

Démonstration de l'indépendance linéaire : 3 pts

Si calcul correct du Wronskien $W = y_1y_2' - y_2y_1'$ et explication que, puisqu'il s'agit d'une fonction paire, aucune conclusion sur son annulation éventuelle ne peut être déduite et donc aucune information sur l'indépendance linéaire à démontrer : 2 pts sur les 5 pts des définition/démonstration.

Conclusion : 1 pt

Total i. : 8 pts

ii. (a) L'équation donnée est linéaire d'ordre 3 à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}$ donc, en particulier, sur $]-1,1[$.

En vertu du théorème d'existence et d'unicité des solutions, elle admet une solution dépendant d'une constante arbitraire car les conditions auxiliaires portent uniquement sur $y(0)$ et $y''(0)$, *i.e.* la valeur $y'(0)$ peut être fixée arbitrairement pour former des conditions de Cauchy conduisant à une solution unique sur $]-1,1[$. La solution du problème existe donc mais n'est pas unique sur $]-1,1[$.

Appel au théorème d'existence et unicité : 1 pt

Continuité des coefficients et du second membre : 1 pt

Condition manquante : 1 pt

Existence et non-unicité : 1 pt

Total (a) : 4 pts

(b) Le théorème d'existence et d'unicité des solutions ne permet pas d'assurer l'existence (et a fortiori l'unicité) d'une solution puisque ses hypothèses ne sont pas vérifiées. En effet, la forme canonique de l'équation s'écrit

$$y'' + \frac{2\,\mathrm{e}^x}{x}y' + \frac{y}{x(1+x^2)} = \frac{1+x}{x}$$

dont les coefficients ne sont pas continus en $x = 0$.

Ceci ne signifie pas qu'une solution ne puisse exister puisque le théorème n'offre que des conditions suffisantes d'existence.

Cependant, en $x = 0$, l'équation différentielle devient

$$0\,y''(0) + 2y'(0) + y(0) = 1$$

soit, tenant compte des conditions initiales fixées dans l'énoncé,

$$2 = 1$$

ce qui est impossible. Le problème n'admet donc pas de solution sur $]-1,1[$.

Hypothèses du théorème pas remplies : 2 pts

Théorème = conditions suffisantes : 1 pt

Test des conditions initiales et conclusion finale : 1 pt (ou 4 pts si le test est effectué d'emblée et conduit à la bonne conclusion)

Total (b) : 4 pts

Total ii. : 8 pts

TOTAL QII : 16 PTS

TOTAL QII : 16 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

- La décomposition de la solution en solution générale de l'équation homogène et solution particulière de l'équation non homogène doit être justifiée en faisant appel à la linéarité de l'équation différentielle.
- La détermination des constantes d'intégration apparaissant dans la solution générale de l'équation homogène doit se faire dans la solution complète (c'est-à-dire après avoir ajouté à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation non homogène) car c'est bien la solution complète qui doit vérifier les conditions initiales du problème et non la seule solution de l'équation homogène.
- La recherche d'une solution particulière peut souvent être menée de différentes façons. Il était ici possible de deviner la forme des deux parties de la solutions particulière. Il était aussi possible d'utiliser, dans les deux cas, la méthode de l'exponentielle-polynôme puisque l'équation est linéaire à coefficients constants et les seconds membres de la forme ad-hoc.

  Il est bien sûr toujours possible d'utiliser la méthode de variation des constantes. Cette méthode est cependant plus lourde à mettre en oeuvre et ne devrait être utilisée que quand c'est la seule méthode applicable. Par ailleurs, il faut être attentif à bien l'utiliser. En particulier, il faut absolument écrire l'équation différentielle sous sa forme canonique (avec le coefficient de la plus haute dérivée égal à 1 et les termes indépendants de la fonction inconnue dans le second membre). Il faut aussi écrire correctement le système (2.43) des notes de cours.
- La solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants s'exprime au moyen d'exponentielles imaginaires quand le polynôme caractéristique admet des zéros complexes. La solution attendue dans un problème réel (équation réelle et conditions initiales réelles) doit cependant être réelle. Il faut donc toujours exprimer celle-ci au moyen de fonctions cosinus/sinus plutôt que d'exponentielles imaginaires. Les calculs s'en trouvent aussi grandement facilités.

Question II

i.
- Le calcul du Wronskien relatif aux fonctions y_1 et y_2 ne permettait pas de conclure dans cet exercice. En effet, on obtient $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ qui est une fonction paire et dont on ne peut donc pas être certain de l'annulation en un point.
- L'équation donnée, si elle est bien linéaire, n'est cependant pas à coefficients constants. La méthode de l'exponentielle-polynôme ne peut donc pas lui être appliquée.
- Il ne suffisait pas ici d'affirmer qu'une fonction paire et une fonction impaire sont toujours linéairement indépendantes sur $]-1,1[$. Il fallait le démontrer. Cette démonstration pouvait être menée, comme dans la solution-type, en partant de la définition de l'indépendance linéaire. Il était aussi possible de justifier ce fait en montrant qu'une fonction paire ne peut s'exprimer comme un multiple d'une fonction impaire sur $]-1,1[$ et qu'elles sont donc linéairement indépendantes sur cet intervalle.

ii. (a)
- Le théorème d'existence et unicité assure l'existence de solutions de l'équation différentielle donnée sur $]-1,1[$. Il fallait justifier cela en montrant que les hypothèses du théorème sont remplies, à savoir la continuité sur l'intervalle considéré des coefficients et du terme indépendant.

- Le théorème garantit l'unicité de la solution si des conditions de Cauchy sont données en un point de l'intervalle considéré. L'équation étant d'ordre trois, ceci implique ici de donner la valeur de la fonction et de ses deux premières dérivées en un même point. En l'espèce, la condition manquante sur $y'(0)$ fait que la solution dépendra toujours d'une constante et ne sera donc pas unique.

(b)
- Le théorème d'existence et unicité se rapporte à une équation écrite sous forme canonique. Il faut que le coefficient de la dérivée la plus haute soit égal à 1 pour étudier la continuité des coefficients et du terme indépendant. C'est la division par le coefficient x de la fonction y'' qui permettait ici de se rendre compte du problème éventuel en $x = 0$.
- Remarquons cependant que le théorème d'existence et unicité ne donne que des conditions suffisantes d'existence et unicité. Des solutions pourraient exister, la solution pourrait même être unique sans que les hypothèses du théorème soient remplies. Ici, cependant, il est simple de vérifier que les conditions initiales données ne vérifient même pas l'équation différentielle et qu'il est donc impossible de trouver une solution du problème posé.