Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2017

Analyse Mathématique

Évaluation formative

Ce test vous est proposé pour vous permettre de faire le point sur votre compréhension du cours d'Analyse Mathématique. Il est purement facultatif. Les résultats, bons ou mauvais, ne seront en aucun cas pris en compte dans une quelconque moyenne.
Pour que l'exercice vous soit réellement profitable, il vous est conseillé de vous placer autant que possible dans les conditions d'une interrogation normale : répondez aux questions seul(e), sans interrompre votre travail, dans un délai maximum de deux heures.

*Les copies seront reprises lors du cours théorique du **28 novembre**.*

- ***Rédigez vos réponses aux deux questions sur des feuilles séparées.***
- ***Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche.***
- ***Indiquez lisiblement votre nom en* MAJUSCULES *suivi de votre prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque feuille.***

Des conseils pour une bonne présentation des copies sont disponibles sur
www.mmm.ulg.ac.be/enseignement/MATH0013/presentation

Question I

i. On considère l'équation différentielle

$$y''(x)+2y'(x)+y(x)=\sin 2x+\frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-x}$$

(a) Déterminez la solution générale de cette équation.

(b) Précisez des conditions suffisantes complémentaires pour que cette équation différentielle possède une solution unique. Justifiez.

ii. Si $f\in C_0(\mathbb{R})$, déterminez une solution particulière de l'équation

$$y''(x)+2y'(x)+y(x)=f(x)\,\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{telle que } y(0)=0.$$

Question II

Pour modéliser la propagation d'une épidémie dans la population, on peut décomposer celle-ci en deux groupes correspondant respectivement au nombre $x(t)$ d'individus sains mais susceptibles d'être contaminés et au nombre $y(t)$ des individus infectés et contagieux.

Si on suppose que le taux de propagation de l'épidémie est proportionnel à la fréquence de rencontre entre individus sains et individus infectés et que la maladie est bénigne (mortalité nulle), l'évolution des variables $x(t)$ et $y(t)$ peut être décrite par

$$\frac{dx}{dt}=-\beta\,x\,y$$
$$\frac{dy}{dt}=\beta\,x\,y$$

où β est une constante positive.

i. Montrez que la population totale est constante dans ce modèle.

ii. En exploitant le résultat ci-dessus, déterminez les évolutions temporelles de $x(t)$ et $y(t)$ si $x(0)=n$ et $y(0)=a$ où a et n sont des constantes strictement positives.

SOLUTION TYPE

Question I

i. (a) Il s'agit d'une équation différentielle, linéaire, d'ordre 2, non homogène à coefficients constants. Comme l'équation est linéaire et non homogène, sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

Structure de la solution (sol. homogène + sol. particulière) présentée théoriquement ou utilisée en pratique : 2 pts (dont 1 pt pour la justification par la linéarité)

A) Résolvons l'équation homogène. Comme l'équation est à coefficients constants, on peut trouver la solution générale de l'équation homogène en considérant les zéros du polynôme caractéristique

$$\mathcal{L}(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$$

Polynôme caractéristique : 1 pt

Celui-ci admet le zéro double $z = -1$ de sorte que la solution générale de l'équation homogène est

Zéros du polynôme caractéristique : 1 pt

$$y_h(x) = (K_1 x + K_2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Solution générale y_h : 2 pts

où K_1 et K_2 sont des constantes.

Total A) : 4 pts

B) Résolvons l'équation non homogène.

Comme l'équation est linéaire et vu que le second membre est la somme de deux termes, le principe de superposition s'applique et on peut rechercher une solution particulière de la forme

Décomposition (expliquée ou mise en oeuvre) de la solution particulière en deux parties : 1 pt

$$y_p(x) = y_p^{[1]}(x) + y_p^{[2]}(x)$$

où $y_p^{[1]}(x)$ et $y_p^{[2]}(x)$ sont, respectivement, des solutions particulières de

$$\mathcal{L}(D)y(x) = \sin 2x \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(D)y(x) = \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-x}$$

1) Résolvons l'équation $\mathcal{L}(D)y(x) = \sin 2x$. Deux approches sont envisageables.

- La fonction $\sin 2x$ est la partie imaginaire de la fonction e^{2ix}.
  Comme les coefficients de l'équation sont réels, une solution particulière de l'équation $\mathcal{L}(D)y(x) = \sin 2x$ est la partie imaginaire d'une solution particulière de l'équation

  Equation complexe correspondante : 1 pt

  $$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{2ix} \qquad (\dagger)$$

  Le second membre est de la forme exponentielle-polynôme $\mathcal{P}_p(x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ où $\mathcal{P}_p(x) = 1$ et $\lambda = 2i$. Comme $2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on peut donc rechercher une solution particulière du type

  Forme de la solution particulière : 1 pt

  $$y_c(x) = C\,\mathrm{e}^{2ix}$$

  Substituant cette expression dans (†), il vient

  $$-4C\,\mathrm{e}^{2ix} + 2(2iC\,\mathrm{e}^{2ix}) + C\,\mathrm{e}^{2ix} = \mathrm{e}^{2ix}$$

  de sorte que

  Valeur de C : 1 pt

  $$C = \frac{1}{-3+4i} = \frac{-3-4i}{25}$$

On trouve donc *Valeur de $y_p^{[1]}$: 1 pt*

$$\begin{aligned} y_p^{[1]}(x) &= \Im[y_c(x)] \\ &= \Im\left[\frac{-3-4i}{25}\,\mathrm{e}^{2ix}\right] \\ &= \Im\left[\frac{-3-4i}{25}(\cos 2x + i\sin 2x)\right] \\ &= -\frac{3}{25}\sin 2x - \frac{4}{25}\cos 2x \end{aligned}$$

OU

- De façon équivalente, vu la forme du second membre, on peut rechercher une solution particulière du type *Forme de la solution particulière : 1 pt*

$$y_p^{[1]}(x) = A\sin 2x + B\cos 2x$$

Remarquons qu'une telle solution particulière existe ici car $2i$, facteur intervenant dans l'exponentielle dont $\sin 2x$ est la partie imaginaire, n'est pas zéro du polynôme caractéristique de l'équation homogène.

Substituant $y_p^{[1]}(x)$ dans l'équation $\mathcal{L}(D)y(x) = \sin 2x$, il vient

$$(-4A\sin 2x - 4B\cos 2x) + 2(2A\cos 2x - 2B\sin 2x) \\ + A\sin 2x + B\cos 2x = \sin 2x$$

de sorte que les constantes A et B doivent être telles que *Système pour A et B : 1 pt*

$$\begin{cases} 3A + 4B = -1 \\ 4A - 3B = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{3}{25} \\ B = -\dfrac{4}{25} \end{cases}$$

Valeurs de A et B : 1 pt

Valeur de $y_p^{[1]}$: 1 pt

Dès lors

$$y_p^{[1]}(x) = -\frac{3}{25}\sin 2x - \frac{4}{25}\cos 2x$$

Total 1) : 4 pts

2) Le second membre de l'équation $\mathcal{L}(D)y(x) = \mathrm{e}^{-x}/x$ n'étant pas de la forme exponentielle-polynôme, on utilise la méthode de variation des constantes.

Puisque les fonctions $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ forment un système fondamental de solutions de l'équation homogène, on considère le système *Système pour C_1 et C_2 : 1 pt*

$$\begin{cases} C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0 \\ C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2 x\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ -C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2(\mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x}) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \end{cases}$$

dont la solution est *Valeurs de C_1 et C_2 : 1 pt*

$$\begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

On calcule ensuite

Primitives : 1 pt

$$\int C_1(x)\,dx = \int (-1)\,dx = -x$$

et

$$\int C_2(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$$

qui permettent de former la solution particulière

Solution particulière $y_p^{[2]}$: 1 pt
Total 2) : 4 pts

$$\begin{aligned} y_p^{[2]}(x) &= \left(\int C_1(x)\,dx\right) y_1(x) + \left(\int C_2(x)\,dx\right) y_2(x) \\ &= -x\,\mathrm{e}^{-x} + \ln|x|\,x\,\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Total B) : 9 pts

La solution générale de l'équation non homogène est donc

Solution générale : 1 pt

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p^{[1]}(x) + y_p^{[2]}(x) \\ &= (K_1 x + K_2)\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{3}{25}\sin 2x - \frac{4}{25}\cos 2x + x\,\mathrm{e}^{-x}(\ln|x| - 1) \end{aligned}$$

Total i.(a) : 16 pts

(b) Les coefficients constants sont continus sur $\mathbb{R}$ et le second membre

Continuité sur $]0,+\infty[$ (ou $]-\infty,0[$) : 1 pt

$$f(x) = \sin 2x + \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-x}$$

est continu sur l'intervalle $]0,+\infty[$ (resp. sur $]-\infty,0[$).
Le théorème d'existence et d'unicité affirme alors que l'équation différentielle admet une solution unique sur cet intervalle si on lui associe des conditions initiales de Cauchy, *i.e.* si on fixe les valeurs de $y(x_0)$ et $y'(x_0)$ où $x_0 \in]0,+\infty[$ (resp. $x_0 \in]-\infty,0[$).

Condition de Cauchy : 2 pts (dont 1 pt pour $x_0 \in]0,+\infty[$, resp. $x_0 \in]-\infty,0[$)
Total i.(b) : 3 pts

ii. Il s'agit de la même équation différentielle où seul le second membre a changé. On peut donc exploiter les résultats obtenus précédemment.
La solution générale de l'équation homogène est

$$y_h(x) = (K_1 x + K_2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

Comme $f(x)$ n'est pas nécessairement un polynôme, on doit utiliser la méthode de variation des constantes pour déterminer une solution particulière en exploitant le fait que les fonctions

$$y_1(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$$

constituent un système fondamental de solutions de l'équation homogène.
On forme le système

Système pour C_1 et C_2 : 1 pt

$$\begin{cases} C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ -C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2(\mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x}) = f(x)\,\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

dont la solution est

Valeurs de C_1 et C_2 : 1 pt

$$C_1(x) = -x f(x) \quad \text{et} \quad C_2(x) = f(x)$$

Ces fonctions étant continues sur $\mathbb{R}$, on peut former les primitives (définies sur $\mathbb{R}$)

$$-\int x f(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int f(x)\, dx$$

et la solution particulière de l'équation non homogène

Expression de y_p : 1 pt

$$y_p(x) = \left(-\int x f(x)\, dx\right) \mathrm{e}^{-x} + \left(\int f(x)\, dx\right) x\,\mathrm{e}^{-x}$$

Pour que la condition supplémentaire $y_p(0) = 0$ soit vérifiée, il suffit de choisir les primitives s'annulant en $x = 0$, soit

Choix des primitives s'annulant en $x = 0$: 2 pts

$$y_p(x) = \left(-\int_0^x t f(t)\, dt\right) \mathrm{e}^{-x} + \left(\int_0^x f(t)\, dt\right) x\,\mathrm{e}^{-x}$$

Total ii. : 5 pts

TOTAL QI : 24 PTS

Question II

i. Des deux équations données, nous déduisons immédiatement que

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dy}{dt}$$

d'où l'intégrale première

$$x(t) + y(t) = C$$

où C est une constante. Cette intégrale première signifie que la population totale est constante dans ce modèle. Remarquons que, vu le contexte, C est une constante strictement positive.

Total i. : 2 pts

ii. En substituant $C - x$ à y dans la première équation donnée, nous avons

$$\frac{dx}{dt} = \beta x(x - C) \tag{1}$$

qui est une équation différentielle du premier ordre à variables séparables. On a donc, ignorant provisoirement les solutions singulières,

Élimination d'une variable : 2 pts

$$\int \frac{dx}{x(x-C)} = \beta \int dt$$

où

Méthode de résolution : 2 pts

$$\frac{1}{x(x-C)} = -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{x-C}\right)$$

La primitivation conduit alors à

$$\frac{1}{C} \ln \left|\frac{x-C}{x}\right| = \beta t + K$$

où K est une autre constante. Prenant l'exponentielle des deux membres, cette égalité devient

$$\frac{x-C}{x} = \pm\,\mathrm{e}^{C(\beta t + K)}$$

et, en posant $M = \pm\,\mathrm{e}^{CK}$,

Solution pour la variable conservée : 2 pts

$$\frac{x-C}{x} = M\,\mathrm{e}^{C\beta t}$$

ou encore

$$x(t) = \frac{C}{1 - M\,\mathrm{e}^{C\beta t}}$$

Solution pour l'autre variable : 2 pts

puis, de $y = C - x$,

$$y(t) = \frac{-CM\,\mathrm{e}^{C\beta t}}{1 - M\,\mathrm{e}^{C\beta t}}$$

Les conditions initiales nous permettent de déterminer les constantes C et M. D'abord,

Principe de détermination de constantes : 1 pt

$$C = x(0) + y(0) = n + a$$

puis

$$n = x(0) = \frac{C}{1 - M}$$

conduisent à

$$C = a + n \qquad \text{et} \qquad M = -\frac{a}{n}$$

Valeurs des constantes : 2 pts

En conclusion, les évolutions temporelles recherchées sont

$$x(t) = \frac{n(a+n)}{n + a\,\mathrm{e}^{(a+n)\beta t}}$$

et

$$y(t) = \frac{a(a+n)\,\mathrm{e}^{(a+n)\beta t}}{n + a\,\mathrm{e}^{(a+n)\beta t}}$$

Solution finale : 2 pts

Remarquons que les solutions $x(t) = 0$ et $x(t) = C$ de (1), impliquant respectivement qu'il n'y ait que des individus infectés (c'est-à-dire $x(t) = 0$ et $y(t) = C$) ou que des individus sains (c'est-à-dire $x(t) = C$ et $y(t) = 0$), ne sont pas acceptables puisqu'elles ne vérifient pas les conditions initiales données ($x(0) = n \neq 0$ et $y(0) = a \neq 0$).

Commentaire sur les solutions singulières : 1 pt

Total ii. : 14 pts

TOTAL QI : 16 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

i. (a)
- C'est la linéarité de l'équation qui autorise l'utilisation du théorème de structure permettant d'exprimer la solution générale comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation complète. Il convient de préciser ce point pour justifier l'approche de résolution utilisée.
- La recherche d'une solution particulière du type $A\sin 2x + B\cos 2x$ correspondant au second membre $\sin 2x$ est possible ici car $2i$, facteur intervenant dans l'exponentielle dont $\sin 2x$ est la partie imaginaire, n'est pas zéro du polynôme caractéristique de l'équation homogène. Si, par exemple, $2i$ était un zéro simple de $\mathcal{L}(z)$, la méthode de l'exponentielle-polynôme nous conduirait à rechercher une solution particulière du type $x(A\sin 2x + B\cos 2x)$.
- La fonction e^{-x}/x n'est pas du type exponentielle-polynôme car elle ne peut pas s'exprimer comme le produit d'une exponentielle et d'un polynôme. Il convient donc de rechercher une solution particulière en utilisant la méthode de variation des constantes.

(b)
- C'est le théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles linéaires qui permet de répondre à cette question. Avant de faire appel à un théorème il convient de vérifier que les hypothèses sont satisfaites (ici la continuité des coefficients et du second membre).
- L'énoncé demandant de préciser des conditions suffisantes complémentaires pour que le problème différentiel possède une solution unique, il ne suffit pas de dire qu'il manque deux conditions complémentaires. Conformément au théorème d'existence et d'unicité, il convient de donner des conditions de Cauchy fixant la valeur de la fonction inconnue et de sa dérivée en un point x_0.

  Le second membre n'étant pas défini en $x = 0$, le théorème d'existence et d'unicité doit être invoqué sur $]0,\infty[$ si les conditions de Cauchy sont données en un $x_0 > 0$ ou sur $]-\infty,0[$ si $x_0 < 0$.
- Remarquons que le théorème d'existence et d'unicité utilisé exprime seulement des conditions suffisantes, pas des conditions nécessaires. On peut donc définir d'autres conditions complémentaires assurant l'existence d'une solution unique. Cependant, la justification est alors plus laborieuse car il convient de montrer que les conditions complémentaires introduites permettent de fixer de façon unique les constantes d'intégration apparaissant dans la solution générale de l'équation.

ii.
- La fonction $f(x)$ du second membre est inconnue. Il faut donc déterminer une solution particulière tout à fait générale, valable pour $f(x)$ quelconque. La seule méthode utilisable pour ce faire est la méthode de variation des constantes dans laquelle les primitives des "constantes" sont laissées telles qu'elles dans la solution puisqu'elles ne peuvent être calculées explicitement.
- Pour fixer des conditions en $x = 0$, il convient de faire le choix des primitives qui s'annulent en $x = 0$ dans l'expression de la solution particulière issue de la méthode de variation des constantes.

Question II

Il est indispensable, en particulier face à un problème différentiel représentant un phénomène physique, de bien identifier les fonctions inconnues et la variable. Dans cet exercice, il y a deux fonctions inconnues, $x(t)$ et $y(t)$, et la variable par rapport à laquelle les dérivées sont évaluées et l'intégration réalisée est le temps t.

i.

ii.
- Comme suggéré dans l'énoncé, le résultat $x+y=C$ du point i. peut être utilisé pour résoudre le système. La relation permet en effet d'exprimer une des inconnues en fonction de l'autre et, par substitution, de se ramener à une équation différentielle à une seule inconnue, ce qui doit toujours être l'objectif lorsqu'on aborde la résolution d'un système d'équations différentielles pour plusieurs inconnues.

  Une fois la solution de cette équation différentielle obtenue, le résultat $x+y=C$ peut être à nouveau utilisé pour calculer simplement la seconde inconnue.
- Il est faux de considérer respectivement y comme une constante dans le second membre de la première équation et x comme une constante dans celui de la deuxième équation pour résoudre celles-ci.
- Lors de la résolution d'une équation à variables séparables, il ne faut pas oublier de considérer les éventuelles solutions singulières, le cas échéant en discutant leur existence en fonction des conditions auxiliaires du problème.