Prof. Éric J.M.DELHEZ

Novembre 2022

MATH0002 - Analyse Mathématique

Évaluation formative

Question I

i. Les fonctions x, x^2 et $x \sin x$ sont-elles linéairement indépendantes sur $\mathtt{I} =]-2\pi, +2\pi[$? Justifiez.

ii. On considère le problème différentiel

$$\begin{cases} y'' + x\,y' + \cos x \;\, y = x^2 \\ y(0) = \alpha, y'(0) = \beta \end{cases}$$

où α et β sont des constantes réelles.

(a) Justifiez le fait que ce problème différentiel définit de façon unique une fonction $y \in C_2(\mathbb{R})$ si les constantes α et β sont fixées.

(b) À partir des relations entre les dérivées de la fonction y et de la fonction z définie par $z(x) = y(-x)$, montrez que z vérifie la même équation différentielle que y.

(c) Déterminez toutes les valeurs de α et β pour lesquelles y est paire. Justifiez.

Question II

On considère la dynamique de la tête d'impression d'une imprimante à jet d'encre qui peut se déplacer sur un axe perpendiculaire au mouvement de la feuille. On note $x(t)$ la position de la tête d'impression le long de cet axe et $u(t)$ la commande par laquelle son mouvement est imposé. Le mouvement peut dès lors être décrit par l'équation différentielle

$$\ddot{x}(t) + 2\omega\dot{x}(t) = 5\omega^2\left[u(t) - x(t)\right] \quad \text{où} \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Initialement, la tête d'impression est immobile dans sa position de repos, *i.e.* $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$. On lui applique ensuite la commande $u(t) = \ell \sin(\omega t)$. Les constantes strictement positives ω et ℓ sont des caractéristiques de la tête d'impression.

i. Déterminez la loi du mouvement $x(t)$ de la tête d'impression pour $t > 0$.

ii. Montrez que, asymptotiquement pour $t \to \infty$, l'imprimante trace une sinusoïde sur la feuille de papier. Déterminez l'amplitude de celle-ci.

Question I

i. Les fonctions x, x^2 et $x\sin x$ sont linéairement indépendantes sur un intervalle $\mathtt{I}$ si leur Wronskien W n'est pas identiquement nul sur cet intervalle.

On calcule

Connaissance avérée du concept d'indépendance linéaire ou du critère W non identiquement nul : 2 pts

$$
\begin{aligned}
W &= \begin{vmatrix} x & x^2 & x\sin x \\ 1 & 2x & \sin x + x\cos x \\ 0 & 2 & 2\cos x - x\sin x \end{vmatrix} \\
&= x\big[2x(2\cos x - x\sin x) - 2(\sin x + x\cos x)\big] - \big[x^2(2\cos x - x\sin x) - 2x\sin x\big] \\
&= 4x^2\cos x - 2x^3\sin x - 2x\sin x - 2x^2\cos x - 2x^2\cos x + x^3\sin x + 2x\sin x \\
&= -x^3\sin x
\end{aligned}
$$

Mise en application et conclusion : 2 pts

Le Wronskien ne s'annulant pas identiquement sur $\mathtt{I} =]-2\pi, +2\pi[$, les fonctions x, x^2 et $x\sin x$ sont linéairement indépendantes sur cet intervalle.

De façon alternative, on peut démontrer que les fonctions x, x^2 et $x\sin x$ sont linéairement indépendantes sur $\mathtt{I} =]-2\pi, +2\pi[$ en faisant appel à la définition de l'indépendance linéaire, *i.e.* en démontrant que

$$\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x\sin x = 0 \quad \forall x \in \mathtt{I} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

L'annulation de la combinaison linéaire en $x = \pi$, $x = -\pi$ et $x = 1$, ces 3 points appartenant à $\mathtt{I} =]-2\pi, +2\pi[$, se traduit par les conditions

$$\begin{cases} \lambda_1\pi + \lambda_2\pi^2 = 0 \\ -\lambda_1\pi + \lambda_2\pi^2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\sin 1 = 0 \end{cases}$$

Ce système homogène admet la seule solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Dès lors, les fonctions sont effectivement linéairement indépendantes sur $\mathtt{I}$.

Total i. : 4 pts

ii. (a) Les coefficients et le terme indépendant de l'équation différentielle linéaire écrite sous forme canonique

$$y'' + x\,y' + \cos x\, y = x^2$$

sont continus sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, l'équation différentielle est du second ordre et est assortie de deux conditions auxiliaires de Cauchy. Dès lors, le théorème d'existence et d'unicité assure l'unicité de la solution. Le problème définit donc une fonction $y \in C_2(\mathbb{R})$ unique.

Hypothèses de linéarité et de continuité : 2 pts
Identification de conditions de Cauchy avec référence à l'ordre 2 de l'EDO : 1 pt
Appel au théorème d'existence et unicité et conclusion : 1 pt
Total (a) : 4 pts

(b) Partant de $y(x) = z(-x)$, on a, par application de la règle de dérivation des fonctions composées,

$$y'(x) = -z'(-x), \qquad y''(x) = (-1)^2 z''(-x) = z''(-x)$$

Relations entre les dérivées de y et z : 2 pts (dont 1 pt pour l'évaluation en $-x$)

En intégrant ceci dans l'équation différentielle vérifiée par la fonction y, on obtient

$$z''(-x) - x\,z'(-x) + \cos x\, z(-x) = x^2$$

où la fonction z et ses dérivées sont évaluées en $-x$. Cette équation étant vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$, remplaçons $(-x)$ par x de façon à évaluer la fonction z en x. On obtient

Remplacement $-x \to x$ et conclusion : 1 pt

$$z''(x) - (-x)\, z'(x) + \cos(-x)\, z(x) = (-x)^2$$

soit

$$z''(x) + x\, z'(x) + \cos x\, z(x) = x^2$$

La fonction z vérifie donc la même équation différentielle que la fonction y.

Total (b) : 3 pts

(c) Pour que $y \in C_2(\mathbb{R})$ soit paire, il est nécessaire que $y'(0) = 0$ puisque toutes les dérivées d'ordre impair d'une fonction paire sont nulles à l'origine. On établit donc ainsi la condition nécessaire $\beta = 0$.

$\beta = 0$ *: 2 pts*

Pour démontrer que $\beta = 0$ suffit à assurer que y est paire, poursuivons la procédure ci-dessus pour exprimer les conditions de Cauchy vérifiées par z. Dans le cas où $\beta = 0$, on a

Justification du caractère suffisant : 2 pts

$$\begin{cases} z'' + x\, z' + \cos x\, z = x^2 \\ z(0) = y(0) = \alpha, \qquad z'(0) = -y'(0) = 0 \end{cases}$$

Puisque y et z sont solutions du même problème différentiel et que la solution de celui-ci est unique sur $\mathbb{R}$, les deux fonctions sont égales et donc

$$y(x) = z(x) = y(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction y est donc paire, quel que soit α, si $\beta = 0$.

Total (c) : 4 pts

Total ii. : 11 pts

TOTAL QI : 15 PTS

Question II

i. L'équation différentielle s'écrit, sous forme canonique,

$$\ddot{x}(t) + 2\omega\dot{x}(t) + 5\omega^2 x(t) = 5\omega^2 \ell \sin\omega t$$

Cette équation différentielle étant linéaire et non homogène, sa solution générale est la somme de la solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $x_p(t)$ de l'équation non homogène.

Puisque l'équation homogène associée est à coefficients constants, on peut trouver sa solution générale à partir des zéros du polynôme caractéristique

Structure de la solution (annoncée ou mise en pratique) : 2 pts (dont 1 pt pour l'appel à la linéarité)

$$\mathcal{L}(z) = z^2 + 2\omega z + 5\omega^2$$

Polynôme caractéristique : 1 pt

soit, puisque le réalisant $\rho = -16\omega^2$,

$$z_{1,2} = \frac{-2\omega \pm 4i\omega}{2} = (-1 \pm 2i)\,\omega$$

Zéros du polynôme caractéristique : 2 pts

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$x_h(t) = \tilde{C}_1\, \mathrm{e}^{(-1+2i)\omega t} + \tilde{C}_2\, \mathrm{e}^{(-1-2i)\omega t}$$

Solution x_h : 2 pts

que l'on peut écrire sous forme réelle

Mise sous forme réelle valorisée plus loin.

$$x_h(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}\left(C_1\cos 2\omega t + C_2 \sin 2\omega t\right)$$

Puisque le second membre de l'équation non homogène est de la forme $\sin\omega t = \Im\left(\mathrm{e}^{i\omega t}\right)$ et que $i\omega$ n'est pas un zéro du polynôme caractéristique $\mathcal{L}(z)$, nous allons chercher une solution particulière du type

Principe de recherche d'une solution particulière (forme générale quelle que soit la méthode) : 2 pts

$$x_p(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

Tenant compte de

$$\dot{x}_p(t) = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t \quad \text{et} \quad \ddot{x}_p(t) = -A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t$$

et injectant cette solution dans l'équation différentielle à résoudre, il vient,

$$\begin{aligned}-A\omega^2\sin\omega t - B\omega^2\cos\omega t &+ 2\omega\left(A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t\right)\\ &+ 5\omega^2\left(A\sin\omega t + B\cos\omega t\right) = 5\omega^2\ell\sin\omega t\end{aligned}$$

En égalant les coefficients de $\sin\omega t$ et de $\cos\omega t$ de part et d'autre de l'égalité, on est amené à considérer le système

Identification de la ou des constantes suivant la méthode : 2 pts

$$\begin{cases} 2A + 4B = 0 \\ 4A - 2B = 5\ell \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} A = \ell \\ B = -\dfrac{\ell}{2} \end{cases}$$

Une solution particulière de l'équation non homogène est donc

$$x_p(t) = \ell\sin\omega t - \frac{\ell}{2}\cos\omega t$$

Dès lors, la solution générale de l'équation non homogène s'écrit

Expression de la solution générale : 1 pt

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}\left(C_1\cos 2\omega t + C_2\sin 2\omega t\right) + \ell\sin\omega t - \frac{\ell}{2}\cos\omega t$$

Il reste à déterminer les constantes C_1 et C_2 grâce aux conditions initiales données. Comme

Système pour C_1, C_2 : 2 pts

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = -\omega\,\mathrm{e}^{-\omega t}&\left(C_1\cos 2\omega t + C_2\sin 2\omega t\right)\\ &+ \mathrm{e}^{-\omega t}\left(-2\omega C_1\sin 2\omega t + 2\omega C_2\cos 2\omega t\right) + \omega\ell\cos\omega t + \frac{\omega\ell}{2}\sin\omega t\end{aligned}$$

on doit avoir

Valeurs de C_1 et C_2 : 1 pt

$$\begin{cases} x(0) = 0 = C_1 - \dfrac{\ell}{2} \\ \dot{x}(0) = 0 = -\omega C_1 + 2\omega C_2 + \omega\ell \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} C_1 = \dfrac{\ell}{2} \\ C_2 = -\dfrac{\ell}{4} \end{cases}$$

La solution du problème différentiel est donc

Solution finale : 2 pts (dont 1 pt pour la mise sous forme réelle)
Total i. : 17 pts

$$x(t) = \frac{\ell}{4}\mathrm{e}^{-\omega t}\left(2\cos 2\omega t - \sin 2\omega t\right) + \ell\sin\omega t - \frac{\ell}{2}\cos\omega t$$

ii. La solution obtenue est telle que

$$x(t) \sim \ell\sin\omega t - \frac{\ell}{2}\cos\omega t, \quad (t\to+\infty)$$

En effet, $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\omega t} = 0$, de sorte que le premier terme de la solution est négligeable par rapport aux deux autres.

Comportement asymptotique de $x(t)$: 1 pt

Cette fonction peut être décrite par une fonction harmonique unique en introduisant les paramètres $A > 0$ et φ tels que

$$\ell \sin \omega t - \frac{\ell}{2} \cos \omega t = A \sin(\omega t - \varphi) = A \sin \omega t \cos \varphi - A \cos \omega t \sin \varphi$$

Écriture sous forme d'une fonction harmonique unique : 1 pt

En identifiant les coefficients correspondants, il vient

$$\begin{cases} A \cos \varphi = \ell \\ A \sin \varphi = \dfrac{\ell}{2} \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} A = \sqrt{A^2 \cos^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\ell \\ \varphi = \operatorname{arctg} 1/2 \end{cases}$$

Pas de point pour φ (pas demandé).

L'amplitude de la sinusoïde tracée par l'imprimante est donc $\dfrac{\sqrt{5}}{2}\ell$.

Valeur de l'amplitude : 1 pt

Total ii. : 3 pts

TOTAL QII : 20 PTS

COMMENTAIRES ET ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

Question I

i.
- Des fonctions sont linéairement indépendantes sur un intervalle $\mathtt{I}$ si leur Wronskien ne s'annule pas identiquement sur $\mathtt{I}$, c'est-à-dire s'il n'est pas égal à 0 partout dans cet intervalle. Le Wronskien peut s'annuler en certains points de $\mathtt{I}$ sans que ceci remette en cause l'indépendance linéaire.
  En particulier, l'annulation du Wronskien $W = -x^3 \sin x$ en $x = 0$ ne remet pas en question l'indépendance linéaire entre les fonctions sur $]-2\pi, 2\pi[$. Comme W n'est pas identiquement nul sur cet intervalle, les fonctions considérées y sont bien linéairement indépendantes.
- De façon équivalente, on peut prouver l'indépendance linéaire de fonctions sur un intervalle donné en montrant que l'annulation de leur combinaison linéaire partout sur l'intervalle entraine l'annulation des coefficients correspondants. Ici encore, la possibilité d'annuler une de leurs combinaisons linéaires en un point particulier de l'intervalle sans que les coefficients soient tous nuls ne signifie pas que les fonctions sont linéairement dépendantes. Ainsi, de
  $$x + x^2 + x \sin x \Big|_{x=0} = 0$$
  on ne peut déduire que les fonctions sont linéairement dépendantes sur $]-2\pi, 2\pi[$.

ii. (a)
- Le théorème d'existence et unicité des solutions des équations différentielles linéaires permet de justifier l'existence d'une solution unique $y \in C_2(\mathbb{R})$. Il suffit donc de montrer que les hypothèses du théorème sont rencontrées, à savoir la linéarité de l'équation, la continuité sur $\mathbb{R}$ des coefficients et du terme indépendant de l'équation ainsi que la présence de conditions de Cauchy. L'équation étant d'ordre deux, les conditions de Cauchy consistent en l'imposition de la valeur de la fonction et de sa dérivée première en un même point de l'intervalle, ce qui est bien le cas ici.

- Remarquons que le théorème d'existence et unicité se rapporte à une équation écrite sous forme canonique. Il faut que le coefficient de la dérivée la plus haute soit égal à 1 pour étudier la continuité des coefficients et du terme indépendant. C'était bien le cas ici ; aucune manipulation de l'équation n'était nécessaire pour obtenir la forme canonique.

(b) Deux opérations sont nécessaires pour répondre à la question posée.

- La première consiste à effectuer un changement de fonction dans l'équation différentielle en exploitant la suggestion donnée dans l'énoncé de faire appel à la dérivation des fonctions composées. Il faut bien sûr être attentif à évaluer les fonctions y et z aux points adéquats, *i.e.* x ou $-x$.
- La seconde opération consiste à changer de variable dans l'équation obtenue en remplaçant toutes les occurrences de x par $-x$, sans oublier les arguments des fonctions. Cette substitution est justifiée par le fait que si une expression $f(x)$ d'une variable x est nulle pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on a également $f(-x) = 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

(c) La condition $y'(0) = 0$, soit $\beta = 0$, est évidemment nécessaire pour que la fonction y soit paire puisqu'elle doit avoir un graphique symétrique part rapport à l'axe des ordonnées. Toutes les fonctions qui ont une dérivée nulle à l'origine ne sont cependant pas paires... Il fallait donc démontrer que cette condition était également suffisante, ce qui est développé dans la solution-type.

Question II

i.
- C'est la linéarité de l'équation qui autorise l'utilisation du théorème de structure permettant d'exprimer la solution générale comme la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation complète. Il convient de préciser ce point pour justifier l'approche de résolution utilisée.
- La solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants s'exprime au moyen d'exponentielles imaginaires quand le polynôme caractéristique admet des zéros imaginaires. La solution attendue dans un problème réel (équation réelle et conditions initiales réelles) doit cependant être réelle. Il faut donc toujours exprimer celle-ci au moyen de fonctions cosinus/sinus plutôt que d'exponentielles imaginaires. Les calculs s'en trouvent aussi grandement facilités.
- Il faut pouvoir s'adapter aux notations de l'énoncé. Ici, l'inconnue est la fonction x et elle dépend de la variable t. Il faut être attentif à ne pas changer de notation en cours de résolution.
- La recherche d'une solution particulière pouvait être menée de différentes manières.
  - ◇ Quand c'est possible, la méthode la plus simple consiste à deviner la forme d'une solution particulière et à substituer celle-ci dans l'équation non homogène afin de déterminer les coefficients inconnus.

    Le second membre étant de la forme $5\omega^2 \ell \sin \omega t$, on peut rechercher une solution particulière du type $A \sin \omega t + B \cos \omega t$.
  - ◇ Cette forme de la solution générale peut également être justifiée par la méthode de l'exponentielle-polynôme.

    Puisque les coefficients de l'équation différentielle linéaire à résoudre sont constants et réels et que le terme indépendant de l'équation différentielle proposée peut s'écrire

$$5\omega^2\ell\sin\omega t = \Im\left(5\omega^2\ell\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right)$$

on peut résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$ avec le second membre $5\omega^2\ell\,\mathrm{e}^{i\omega t}$ et considérer ensuite la partie imaginaire de la solution particulière complexe correspondante pour former une solution particulière de l'équation initiale.
Puisque l'argument $i\omega$ de l'exponentielle n'est pas un zéro du polynôme caractéristique de l'équation homogène, l'application de la méthode de l'exponentielle-polynôme conduit à rechercher une solution particulière complexe de la forme $C\,\mathrm{e}^{i\omega t}$ où C est une constante complexe à déterminer. La partie réelle de cette solution conduit donc à

$$A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

comme suggéré plus haut.
Remarquons que, si $i\omega$ était un zéro d'ordre 1 du polynôme caractéristique de l'équation homogène associée, c'est une solution complexe de la forme $Ct\,\mathrm{e}^{i\omega t}$ qu'il conviendrait de rechercher, ce qui conduirait à une solution réelle du type

$$At\sin\omega t + Bt\cos\omega t$$

- ◇ La méthode de variation des constantes est toujours applicable pour la recherche d'une solution particulière d'une équations linéaire. Elle est cependant généralement plus longue et n'était certainement pas ici la solution la plus efficace.
- ◇ Rappelons que, quelle que soit la méthode utilisée pour trouver une solution particulière, il y a toujours moyen de vérifier que la solution particulière obtenue est correcte en la substituant dans l'équation différentielle.

ii. Il y a toujours moyen d'exprimer une combinaison de sinus et cosinus de même argument (ωt ici) comme une fonction harmonique unique du type

$$A\sin(\omega t - \varphi)$$

Cette forme alternative met en évidence l'amplitude A de la fonction harmonique et introduit une déphasage φ. La détermination des constantes A et φ définissant la fonction harmonique peut se faire par de simples manipulations algébriques et trigonométriques, comme montré dans la solution-type.