Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2023

MATH0002 - Analyse Mathématique 1
Examen

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Définissez mathématiquement $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ où a et $x_0 \in \mathbb{R}$.

ii. En exploitant la formule de Taylor, déterminez une approximation du second ordre de la dérivée seconde d'une fonction réelle T au point z_0 en vous appuyant sur des mesures ponctuelles de $T(z_0)$, $T(z_0+\Delta z)$ et $T(z_0-\Delta z)$, *i.e.* déterminez les coefficients α, β et γ tels que

$$T''(z_0) = \alpha T(z_0-\Delta z) + \beta T(z_0) + \gamma T(z_0+\Delta z) + O(\Delta z^2), \qquad (\Delta z \to 0)$$

Quelles hypothèses doit-on formuler sur T pour que cette expression soit valable ?

iii. On considère le problème différentiel

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \beta \sin(\omega t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

où β et ω sont des constantes strictement positives.

(a) Justifiez l'existence et l'unicité de la solution sur $\mathbb{R}$.

(b) Existe-t-il des valeurs de β et ω pour lesquelles la solution $y(t)$ n'est pas bornée sur $[0,+\infty[$? Justifiez.

iv. On considère un ballon-sonde se déplaçant dans l'atmosphère pour mesurer la température de l'air. Sa position est donnée à l'instant t par les coordonnées cartésiennes $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

(a) Si la distribution de la température dans l'atmosphère est donnée par $T(x,y,z,t)$, exprimez le taux de variation temporelle de la température mesurée par le thermomètre porté par le ballon-sonde. Sous quelle(s) hypothèses(s) cette expression peut-elle être justifiée ?

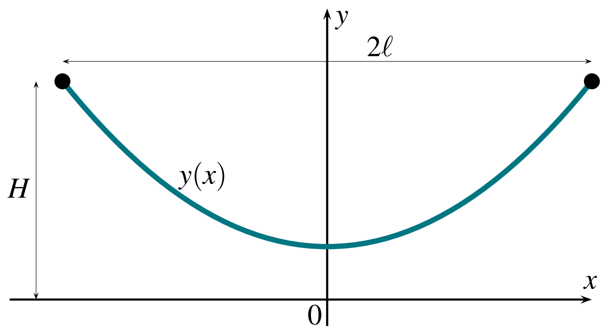
(b) Exprimez le taux de variation temporelle de la température calculé en (a) en faisant apparaitre le gradient de température et la vitesse $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z$ du ballon-sonde.

v. Exprimez en français et démontrez l'égalité

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = 0$$

où $\mathbf{f}$ désigne un champ vectoriel défini sur $\mathbb{R}^3$. Précisez l'hypothèse sur la fonction $\mathbf{f}$ assurant la validité de la formule.

Question II



On se propose de déterminer la forme $y(x)$ prise par un câble électrique suspendu entre deux pylônes espacés d'une distance 2ℓ. Les deux extrémités du câble sont attachées à une hauteur H au-dessus du sol. La fonction $y(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$y'' = \frac{\rho g}{T_0}\sqrt{1+y'^2}$$

où les constantes strictement positives ρ, g et T_0 désignent respectivement la masse par unité de longueur du câble, la norme de l'accélération de la pesanteur et la tension dans le câble en $x = 0$.

i. Exprimez mathématiquement les conditions auxiliaires correspondant au problème posé.
ii. Déterminez la solution $y(x)$ du problème différentiel en remarquant que, puisque la fonction y n'apparait pas telle quelle dans l'équation, il est judicieux de poser $y' = v$.

Question III

Dans les méthodes numériques d'optimisation dites par région de confiance, on approche itérativement le minimum d'une fonction cible f par la résolution d'une suite de sous-problèmes simplifiés. Ces sous-problèmes impliquent typiquement la recherche du minimum d'une approximation quadratique $m(\mathrm{x})$ de $f(\mathrm{x})$ à l'intérieur d'une boule dont le rayon ρ, appelé le rayon de confiance, varie avec la qualité de l'approximation.

On considère un problème bi-dimensionnel de ce type. En discutant en fonction de $\rho > 0$, déterminez la position et la valeur du minimum absolu de

$$m(x,y) = 3x + x^2 - 3y - xy + y^2$$

dans la région de confiance $R(\rho) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq \rho\right\}$.

SOLUTION TYPE

Question I

i. L'expression $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ où a et $x_0 \in \mathbb{R}$ peut être traduite mathématiquement par

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \operatorname{dom} f : 0 < |x - x_0| \leq \delta) : |f(x) - a| \leq \varepsilon$$

où $\operatorname{dom} f$ désigne le domaine de définition de la fonction f.

ii. Par la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned} T(z) = T(z_0) + T'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}T''(z_0)(z - z_0)^2 \\ + \frac{1}{6}T'''(z_0)(z - z_0)^3 + O\left([z - z_0]^4\right), \ (z \to z_0) \end{aligned}$$

Posant $\Delta z = z - z_0$, on en tire

$$\begin{aligned} T(z_0 + \Delta z) = T(z_0) + T'(z_0)\Delta z + \frac{1}{2}T''(z_0)\Delta z^2 \\ + \frac{1}{6}T'''(z_0)\Delta z^3 + O\left(\Delta z^4\right), \quad (\Delta z \to 0) \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} T(z_0 - \Delta z) = T(z_0) - T'(z_0)\Delta z + \frac{1}{2}T''(z_0)\Delta z^2 \\ - \frac{1}{6}T'''(z_0)\Delta z^3 + O\left(\Delta z^4\right), \quad (\Delta z \to 0) \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces deux expressions, on obtient

$$T(z_0 + \Delta z) + T(z_0 - \Delta z) = 2T(z_0) + T''(z_0)\Delta z^2 + O\left(\Delta z^4\right), \quad (\Delta z \to 0)$$

Finalement,

$$T''(z_0) = \frac{1}{\Delta z^2}T(z_0 - \Delta z) - \frac{2}{\Delta z^2}T(z_0) + \frac{1}{\Delta z^2}T(z_0 + \Delta z) + O\left(\Delta z^2\right), \quad (\Delta z \to 0)$$

qui correspond au résultat annoncé pour

$$\alpha = \frac{1}{\Delta z^2}, \quad \beta = -\frac{2}{\Delta z^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\Delta z^2}$$

La validité de ce résultat est limitée par la validité de l'expression de la formule de Taylor ci-dessus. Il suffit donc que T (qui est réelle) soit quatre fois continûment dérivable au voisinage de z_0.

iii. (a) L'équation différentielle

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \beta \sin(\omega t)$$

est une équation linéaire du deuxième ordre dont les coefficients et le terme indépendant sont continus sur $\mathbb{R}$. Elle est assortie de 2 conditions de Cauchy ($y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$) données en $x = 0 \in \mathbb{R}$.

Le théorème d'existence et unicité garantit donc l'existence d'une solution unique appartenant à $C_2(\mathbb{R})$.

(b) L'équation différentielle

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \beta \sin(\omega t)$$

est linéaire et non homogène. Sa solution générale $y(t)$ est donc la somme de la solution générale $y_h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $y_p(t)$ de l'équation non homogène.

L'équation homogène

$$y'' + 2y' + y = 0$$

étant linéaire à coefficients constants, nous considérons le polynôme caractéristique associé

$$\mathcal{L}(z) = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$$

qui possède le zéro double $z = -1$. La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors

$$y_h(t) = (C_1 t + C_2)\,\mathrm{e}^{-t}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. La présence de l'exponentielle décroissante nous apprend que cette partie de la solution est toujours bornée sur $[0, +\infty[$.

Puisque l'équation est linéaire à coefficients réels constants et que le second membre $\beta \sin(\omega t) = \Im\left[\beta\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right]$ est la partie imaginaire d'une expression du type exponentielle-polynôme, l'équation possède une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = \Im\left[K t^{\alpha}\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right] = \Im\left[K\,(\cos\omega t + i \sin\omega t)\right]$$

où K est une constante et $\alpha = 0$ est la multiplicité de $i\omega$ comme zéro du polynôme caractéristique $\mathcal{L}(z)$. Cette solution particulière est également toujours bornée sur $[0, +\infty[$.
En conclusion, il n'existe aucun couple (β, ω) pour lequel la solution serait non bornée sur $[0, +\infty[$.

iv. (a) Le thermomètre porté par le ballon-sonde indique une température

$$T(t) = T[x(t), y(t), z(t), t]$$

Par application du théorème de dérivation des fonctions composées, le taux de variation temporelle de la température mesurée par le thermomètre porté par le ballon-sonde est donné par

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial T}{\partial t}$$

où les dérivées partielles de T doivent être évaluées au point $[x(t), y(t), z(t), t]$. Cette expression du taux de variation temporelle est valable sur tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ sur lequel les fonctions x, y et z sont dérivables et tel que T est continûment dérivable sur un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^4$ pour lequel $[x(t), y(t), z(t), t] \in \omega$ pour tout $t \in \Omega$.

(b) Si on introduit le gradient de la température

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

et la vitesse du ballon-sonde

$$\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y + \dot{z}\mathbf{e}_z = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z$$

le taux de variation temporelle déterminé ci-dessus s'écrit aussi

$$\frac{dT}{dt} = \nabla T \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial T}{\partial t}$$

v. La relation $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = 0$ se lit "La divergence du rotationnel du champ vectoriel **f** est nulle.".
Le rotationnel du champ vectoriel **f** s'écrit

$$\nabla \wedge \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

Par définition de la divergence du champ vectoriel **g**, on sait que

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}$$

On a donc

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 f_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial z \partial y} = 0$$

où l'égalité des dérivées partielles d'ordre 2 qui ne diffèrent que par l'ordre dans lequel les dérivées sont évaluées peut être justifiée par l'hypothèse $\mathbf{f} \in C_2(\mathbb{R}^3)$.

Question II

i. La position du câble est connue aux deux extrémités, soit $y(\ell) = H$ et $y(-\ell) = H$.

ii. L'équation

$$y'' = \frac{\rho g}{T_0}\sqrt{1 + y'^2}$$

est une équation différentielle non linéaire du second ordre. Nous remarquons que y est absent et qu'en posant $y' = v$, cette équation devient

$$\frac{v'}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{\rho g}{T_0}$$

Il s'agit d'une équation du premier ordre à variables séparables de sorte que sa solution générale est définie par

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int \frac{\rho g}{T_0}\, dx + C_1$$

c'est-à-dire par

$$\operatorname{arcsh} v = \frac{\rho g}{T_0}\, x + C_1$$

Ainsi,

$$v = y' = \operatorname{sh}\left(\frac{\rho g}{T_0}\, x + C_1\right)$$

et, en primitivant cette expression,

$$y(x) = \frac{T_0}{\rho g} \operatorname{ch}\left(\frac{\rho g}{T_0}\, x + C_1\right) + C_2$$

Les constantes C_1 et C_2 peuvent être déterminées par les conditions limites, soit

$$\begin{cases} H = y(\ell) = \dfrac{T_0}{\rho g} \operatorname{ch}\left(\dfrac{\rho g}{T_0}\, \ell + C_1\right) + C_2 \\ \\ H = y(-\ell) = \dfrac{T_0}{\rho g} \operatorname{ch}\left(-\dfrac{\rho g}{T_0}\, \ell + C_1\right) + C_2 \end{cases} \qquad (\sharp)$$

De ces équations, on tire

$$\operatorname{ch}\left(\frac{\rho g}{T_0}\, \ell + C_1\right) = \operatorname{ch}\left(-\frac{\rho g}{T_0}\, \ell + C_1\right)$$

Vu la parité de la fonction ch, cette égalité est réalisée si

$$\frac{\rho g}{T_0}\, \ell + C_1 = \pm\left(-\frac{\rho g}{T_0}\, \ell + C_1\right)$$

C'est le cas si
$$\frac{\rho g}{T_0}\,\ell = -\frac{\rho g}{T_0}\,\ell \quad \text{ou si} \quad C_1 = -C_1$$
La première égalité est toujours fausse et la deuxième donne $C_1 = 0$. Par ailleurs, si $C_1 = 0$, ($\sharp$) conduit à
$$C_2 = -\frac{T_0}{\rho g}\,\mathrm{ch}\left(\frac{\rho g}{T_0}\,\ell\right) + H$$
En conclusion, la solution unique vérifiant les conditions auxiliaires est donnée par
$$y(x) = \frac{T_0}{\rho g}\left[\mathrm{ch}\left(\frac{\rho g}{T_0}\,x\right) - \mathrm{ch}\left(\frac{\rho g \ell}{T_0}\right)\right] + H$$
et elle détermine la forme prise par le câble.

Question III

La fonction
$$m(x,y) = 3x + x^2 - 3y - xy + y^2$$
est continue sur le compact (le disque)
$$R(\rho) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq \rho\right\}$$
Elle y réalise donc ses bornes supérieure et inférieure et l'existence du minimum absolu est garantie. La fonction m étant dérivable en tout point, le minimum recherché doit figurer parmi les points stationnaires de m ou appartenir à la frontière de $R(\rho)$.
Recherchons les points stationnaires de la fonction $m(x,y)$. Ces points sont solutions de
$$\nabla m = \mathbf{0}$$
c'est-à-dire du système
$$\begin{cases} \dfrac{\partial m}{\partial x} = 3 + 2x - y = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial m}{\partial y} = -3 - x + 2y = 0 \end{cases}$$
Ajoutant 2 fois la deuxième équation à la première, on obtient
$$3 + 2x - y - 6 - 2x + 4y = -3 + 3y = 0$$
soit $y = 1$ et donc $x = -1$. Le point $(-1,1)$ est le seul point stationnaire de m.
Pour connaître la nature du point stationnaire, il suffit de calculer la matrice hessienne.
$$\mathsf{H}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 m}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 m}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 m}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
En vertu du Critère de Sylvester, puisque H est symétrique et que
$$\mathsf{H}_1 = 2 > 0\,,$$
$$\mathsf{H}_2 = 4 - 1 = 3 > 0\,,$$
la matrice hessienne est définie positive en tout point et, en particulier, au point stationnaire $(-1,1)$. Il s'agit donc du minimum absolu de la fonction $m(x,y)$ sur $\mathbb{R}^2$.

Il y a alors deux cas à considérer selon que le point $(-1,1)$ appartient ou non à $R(\rho)$.

- Soit ce point se trouve dans le disque de rayon ρ. C'est le cas si

$$(-1)^2+(1)^2 \leq \rho^2$$

donc si

$$\rho \geq \sqrt{2}$$

Le minimum absolu recherché se trouve alors en $(-1,1)$ et la fonction y prend la valeur minimale $m(-1,1)=-3$.

- Soit ce point se trouve à l'extérieur du disque. C'est le cas si $\rho < \sqrt{2}$. Dans ce cas, il n'y a pas de point stationnaire dans $R(\rho)$ et le minimum recherché doit se trouver sur la frontière du disque, c'est-à-dire sur le cercle

$$x^2+y^2=\rho^2$$

Nous sommes alors confrontés à la recherche du minimum de $m(x,y)$ sous la contrainte

$$g(x,y)=x^2+y^2-\rho^2=0$$

Construisons le Lagrangien

$$L(x,y,\lambda)=m(x,y)-\lambda g(x,y)=3x+x^2-3y-xy+y^2-\lambda(x^2+y^2-\rho^2)$$

Les fonctions m et g sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et, sur le cercle,

$$\nabla g(x,y)=\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{e}_x+\frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{e}_y=2x\mathbf{e}_x+2y\mathbf{e}_y\neq\mathbf{0}$$

Le minimum recherché se trouve donc parmi les points stationnaires du Lagrangien. Ces points sont solutions de

$$\nabla L=\mathbf{0}$$

Ils vérifient donc le système

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=3+2x-y-2\lambda x=0 & (1)\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=-3-x+2y-2\lambda y=0 & (2)\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=-(x^2+y^2-\rho^2)=0 & (3)\end{cases}$$

Effectuant $(1)\cdot y-(2)\cdot x$, on obtient

$$3y+2xy-y^2-2\lambda xy+3x+x^2-2yx+2\lambda xy=0$$

soit

$$3(x+y)+(x^2-y^2)=(x+y)(3+x-y)=0$$

  - Une première solution est $x=-y$ pour laquelle l'équation (3) donne

$$x^2+x^2-\rho^2=0$$

soit

$$x=\pm\frac{\rho}{\sqrt{2}}$$

On a donc les deux points stationnaires

$$\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}},-\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{\rho}{\sqrt{2}},\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \tag{$\spadesuit$}$$

- Une deuxième solution est $x-y=-3$ pour laquelle l'équation (3) donne

$$(y-3)^2+y^2-\rho^2=0$$

soit

$$2y^2-6y+(9-\rho^2)=0$$

dont le discriminant Δ est négatif pour $\rho<\sqrt{2}$. En effet, dans ce cas,

$$\Delta=36-4\cdot 2\cdot(9-\rho^2)=-36+8\rho^2<-20$$

Cette solution ne donne donc aucun point stationnaire.

Évaluons la fonction à minimiser aux points (♠).

$$m\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}},-\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\rho^2}{2}+3\sqrt{2}\rho$$

$$m\left(-\frac{\rho}{\sqrt{2}},\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\rho^2}{2}-3\sqrt{2}\rho$$

En comparant les deux valeurs obtenues, nous pouvons conclure que le minimum absolu se trouve, dans ce cas, en

$$\left(-\frac{\rho}{\sqrt{2}},\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)$$

En conclusion,

- si $\rho<\sqrt{2}$: le minimum se trouve en

$$\left(-\frac{\rho}{\sqrt{2}},\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{où} \qquad m\left(-\frac{\rho}{\sqrt{2}},\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\rho^2}{2}-3\sqrt{2}\rho$$

- si $\rho\geq\sqrt{2}$: le minimum se trouve en $(-1,1)$ et $m(-1,1)=-3$.

Les deux solutions se raccordent continûment quand $\rho=\sqrt{2}$.