Août 2022

MATH0002-4 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Durée de l'épreuve : 3 heures et demie.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
*Indiquez sur chacune de vos feuilles votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Si $f \in C_3(\mathbb{R})$ présente un maximum en x_0, peut-on affirmer que $f''(x_0) < 0$? Justifiez.

ii. Si f_1 et f_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que $f_1 \sim f_2$ pour $x \to 0$, peut-on affirmer que $f'_1 \sim f'_2$ au voisinage de 0 ? Justifiez.

iii. En utilisant le développement de Taylor de la fonction réelle $f \in C_4(\mathbb{R})$, déterminez les paramètres α, β et γ pour obtenir une approximation de la dérivée seconde de f en $a \in \mathbb{R}$ de la forme

$$f''(a) = \alpha\, f(a-\Delta) + \beta\, f(a) + \gamma\, f(a+\Delta) + O(\Delta^2), \quad (\Delta \to 0)$$

iv. Montrez que si f_1, f_2 et f_3 sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors

$$F(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^3$.

v. Établissez la relation

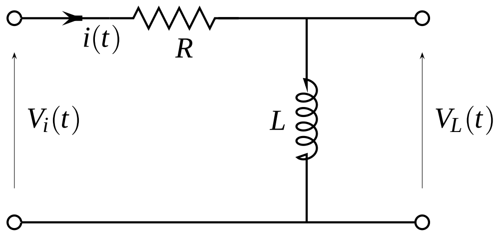
$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = 0$$

où $\mathbf{f}$ désigne un champ vectoriel défini sur $\mathbb{R}^3$.
Précisez l'hypothèse sur la fonction $\mathbf{f}$ assurant la validité de la formule.

Tournez la page.

Question II

On considère le circuit électrique RL, représenté ci-contre, constitué d'une résistance et d'une self placées en série. Un tel circuit est parfois utilisé dans les colonnes de haut-parleurs pour sélectionner les fréquences à transmettre.
On applique une tension électrique $V_i(t)$ aux bornes du circuit et on mesure la tension $V_L(t)$ aux bornes de la self. Celles-ci sont liées par les équations



$$V_L(t) = L\frac{di}{dt}, \qquad R\,i(t) + L\frac{di}{dt} = V_i(t)$$

où R et L sont des constantes strictement positives et où $i(t)$ désigne le courant électrique circulant dans le circuit. À l'instant initial, le courant électrique est nul.

i. Déterminez le courant $i(t)$ et la tension de sortie $V_L(t)$ si on applique une tension alternative $V_i(t) = E\sin\omega t$ (où E et ω sont des constantes strictement positives) aux bornes du circuit.
ii. Déterminez l'expression de la tension de sortie $V_L(t)$ en fonction de $V_i(t)$ si on applique une tension $V_i(t)$ continue quelconque aux bornes du circuit.

Question III

On considère la fonction $f(x,y,z) = xyz$ et l'ensemble

$$\mathtt{E}_C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq C\}$$

i. Esquissez $\mathtt{E}_1$ (c'est-à-dire $\mathtt{E}_C$ dans le cas où $C = 1$).
ii. Déterminez les valeurs minimale et maximale de f sur $\mathtt{E}_1$. En quels points ces valeurs sont-elles atteintes ?
iii. Soit $F(C)$ la valeur maximale de f sur l'ensemble $\mathtt{E}_C$. Que vaut $F'(1)$?

SOLUTION

Question I

i. Si $f \in C_3(\mathbb{R})$ présente un maximum en x_0, on ne peut pas affirmer que $f''(x_0) < 0$ comme le montre le contre-exemple de la fonction $f(x) = -x^4 \in C_3(\mathbb{R})$. En effet, cette fonction présente un maximum en $x = 0$ mais est telle que $f''(0) = 0$.

ii. L'énoncé est faux comme le montre le contre-exemple constitué par les fonctions

$$f_1(x) = 1 + x \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = 1 + x^2$$

D'une part, ces fonctions vérifient les hypothèses puisqu'elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1+x}{1+x^2} = 1$$

de sorte que $f_1 \sim f_2$ pour $x \to 0$.
D'autre part, ces fonctions ne vérifient pas la thèse puisque

$$f_1'(x) = 1, \quad f_2'(x) = 2x$$

et

$$1 \not\sim 2x, \quad (x \to 0)$$

iii. Écrivons le développement de Taylor de la fonction f au voisinage de a. Puisque $f \in C_4(\mathbb{R})$, ce développement peut s'écrire sous la forme

$$f(a+\Delta) = f(a) + \Delta f'(a) + \frac{\Delta^2}{2!} f''(a) + \frac{\Delta^3}{3!} f^{(3)}(a) + O(\Delta^4), \quad (\Delta \to 0)$$

De même,

$$f(a-\Delta) = f(a) - \Delta f'(a) + \frac{\Delta^2}{2!} f''(a) - \frac{\Delta^3}{3!} f^{(3)}(a) + O(\Delta^4), \quad (\Delta \to 0)$$

En additionnant membre à membre, on obtient

$$f(a+\Delta) + f(a-\Delta) = 2f(a) + 2\frac{\Delta^2}{2!} f''(a) + O(\Delta^4), \quad (\Delta \to 0)$$

et en résolvant par rapport à $f''(a)$, il vient

$$\begin{aligned} f''(a) &= \frac{f(a+\Delta)}{\Delta^2} + \frac{f(a-\Delta)}{\Delta^2} - 2\frac{f(a)}{\Delta^2} + \frac{O(\Delta^4)}{\Delta^2} \\ &= \frac{f(a+\Delta)}{\Delta^2} + \frac{f(a-\Delta)}{\Delta^2} - 2\frac{f(a)}{\Delta^2} + O(\Delta^2), \quad (\Delta \to 0) \end{aligned}$$

Cette expression correspond à la forme

$$f''(a) = \alpha\, f(a-\Delta) + \beta\, f(a) + \gamma\, f(a+\Delta) + O(\Delta^2), \quad (\Delta \to 0).$$

donnée dans l'énoncé avec $\alpha = \dfrac{1}{\Delta^2}$, $\beta = -\dfrac{2}{\Delta^2}$ et $\gamma = \dfrac{1}{\Delta^2}$.

iv. La fonction

$$F(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$$

est différentiable sur $\mathbb{R}^3$ car

- F est dérivable sur $\mathbb{R}^3$ avec, quel que soit $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3) = f_i'(x_i)$$

  puisque f_i est dérivable ;
- posant $\mathsf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\mathsf{h} = (h_1, h_2, h_3)$, on a, en exploitant la forme des dérivées partielles de F,

$$\lim_{\mathsf{h}\to 0} \frac{F(\mathsf{x}+\mathsf{h}) - F(\mathsf{x}) - \sum_{i=1}^{3} h_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathsf{x})}{|\mathsf{h}|} = \lim_{\mathsf{h}\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{3} \left[f_i(x_i+h_i) - f_i(x_i) - h_i f_i'(x_i) \right]}{|\mathsf{h}|} = 0$$

  puisque, tenant compte de $|h_i| \leq |\mathsf{h}|$,

$$\begin{aligned} \frac{\left| \sum_{i=1}^{3} \left[f_i(x_i+h_i) - f_i(x_i) - h_i f_i'(x_i) \right] \right|}{|\mathsf{h}|} &\leq \sum_{i=1}^{3} \frac{|h_i|}{|\mathsf{h}|} \left| \frac{f_i(x_i+h_i) - f_i(x_i)}{h_i} - f_i'(x_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{f_i(x_i+h_i) - f_i(x_i)}{h_i} - f_i'(x_i) \right| \end{aligned}$$

  et que, les fonctions f_i étant dérivables,

$$\lim_{\mathsf{h}\to 0} \left[\frac{f_i(x_i+h_i) - f_i(x_i)}{h_i} - f_i'(x_i) \right] = 0$$

v. Par définition du rotationnel du champ vectoriel $\mathbf{f}$, on sait que

$$\nabla \wedge \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

Par définition de la divergence du champ vectoriel $\mathbf{g}$, on sait que

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial z \partial y} = 0 \end{aligned}$$

où l'égalité des dérivées partielles d'ordre 2 qui ne diffèrent que par l'ordre dans lequel les dérivées sont évaluées peut être justifiée par l'hypothèse $\mathbf{f} \in C_2(\mathbb{R}^3)$.

Question II

L'équation

$$R\, i(t) + L \frac{di}{dt} = V_i(t)$$

peut s'écrire sous la forme canonique

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{V_i(t)}{L}$$

Cette équation différentielle est linéaire et non homogène. Sa solution générale $i(t)$ est donc la somme de la solution générale $i^h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $i^p(t)$ de l'équation non homogène.
L'équation homogène à coefficients constants associée s'écrit

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0$$

et admet pour polynôme caractéristique

$$\mathcal{L}(z)=z+\frac{R}{L}$$

dont le seul zéro est $-R/L$.
La solution générale de cette équation homogène s'écrit donc

$$i^h(t)=C\,\mathrm{e}^{-Rt/L}$$

où C est une constante.

i. Si la tension d'entrée est alternative, de la forme $V_i(t)=E\sin\omega t$, on peut rechercher une solution particulière de la forme

$$i^p(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t$$

où C_1 et C_2 sont des constantes à déterminer. En introduisant la solution dans l'équation différentielle, on obtient

$$-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t+C_1\frac{R}{L}\cos\omega t+C_2\frac{R}{L}\sin\omega t=\frac{E}{L}\sin\omega t$$

Les constantes vérifient donc les relations

$$\begin{cases}-C_1\omega+C_2\dfrac{R}{L}=\dfrac{E}{L}\\ C_2\omega+C_1\dfrac{R}{L}=0\end{cases}$$

ce qui conduit à

$$\begin{cases}C_1=\dfrac{-EL\omega}{R^2+\omega^2L^2}\\ C_2=\dfrac{ER}{R^2+\omega^2L^2}\end{cases}$$

La solution particulière recherchée prend dès lors la forme

$$i^p(t)=\frac{E}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)$$

La solution générale de l'équation non homogène s'écrit alors

$$i(t)=C\,\mathrm{e}^{-Rt/L}+\frac{E}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)$$

La condition initiale $i(0)=0$ conduit à identifier

$$C=\frac{EL\omega}{R^2+\omega^2L^2}$$

Finalement, on obtient donc

$$i(t)=\frac{EL\omega}{R^2+\omega^2L^2}\,\mathrm{e}^{-Rt/L}+\frac{E}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)$$

et

$$V_L(t)=L\frac{di}{dt}=\frac{-ELR\omega}{R^2+\omega^2L^2}\,\mathrm{e}^{-Rt/L}+\frac{EL\omega}{R^2+\omega^2L^2}(R\cos\omega t+\omega L\sin\omega t)$$

L'expression de $V_L(t)$ peut aussi être obtenue au moyen de la relation

$$V_L(t)=V_i(t)-Ri(t)$$

ii. Si la tension d'entrée $V_i(t)$ est une fonction quelconque continue sur $\mathbb{R}$, on peut chercher une solution particulière par la méthode de variation des constantes ou, de façon équivalente, rechercher une solution de la forme

$$i^p(t) = B(t)\,\mathrm{e}^{-Rt/L}$$

On a, en substituant cette solution dans l'équation différentielle,

$$\frac{dB}{dt}\,\mathrm{e}^{-Rt/L} - \frac{BR}{L}\,\mathrm{e}^{-Rt/L} + \frac{BR}{L}\,\mathrm{e}^{-Rt/L} = \frac{V_i(t)}{L}$$

soit

$$\frac{dB}{dt} = \frac{V_i(t)}{L}\,\mathrm{e}^{Rt/L}$$

et donc

$$B(t) = \int \frac{V_i(t)}{L}\,\mathrm{e}^{Rt/L}\;dt$$

ce qui donne, en choisissant la primitive qui s'annule en $t = 0$,

$$i^p(t) = \mathrm{e}^{-Rt/L}\int_0^t \frac{V_i(u)}{L}\,\mathrm{e}^{Ru/L}\;du$$

La solution générale de l'équation non homogène s'écrit alors

$$i(t) = C\,\mathrm{e}^{-Rt/L} + \mathrm{e}^{-Rt/L}\int_0^t \frac{V_i(u)}{L}\,\mathrm{e}^{Ru/L}\;du$$

La condition initiale $i(0) = 0$ donne directement $C = 0$ et

$$i(t) = \mathrm{e}^{-Rt/L}\int_0^t \frac{V_i(u)}{L}\,\mathrm{e}^{Ru/L}\;du$$

puis, finalement,

$$V_L(t) = V_i(t) - Ri(t) = V_i(t) - \frac{R}{L}\,\mathrm{e}^{-Rt/L}\int_0^t V_i(u)\,\mathrm{e}^{Ru/L}\;du$$

L'expression de $V_L(t)$ peut aussi être obtenue au moyen de la relation

$$V_L(t) = L\frac{di}{dt}$$

soit

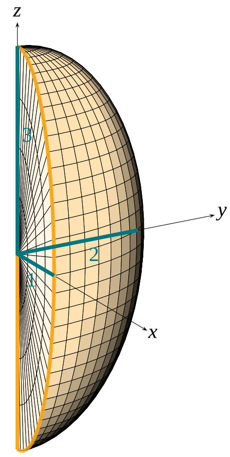
$$\begin{aligned} V_L(t) &= -R\,\mathrm{e}^{-Rt/L}\int_0^t \frac{V_i(u)}{L}\,\mathrm{e}^{Ru/L}\;du + L\,\mathrm{e}^{-Rt/L}\,\frac{V_i(t)}{L}\,\mathrm{e}^{Rt/L} \\ &= V_i(t) - \frac{R}{L}\,\mathrm{e}^{-Rt/L}\int_0^t V_i(u)\,\mathrm{e}^{Ru/L}\;du \end{aligned}$$

Question III

i. L'ensemble $\mathtt{E}_1$ correspond au volume délimité par les plans de coordonnées $x = 0$ et $y = 0$, ainsi que par l'ellipsoïde d'équation

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

qui est centré à l'origine et dont les demi-axes ont des longueurs égales à 1, 2 et 3 respectivement selon OX, OY et OZ. Il peut donc être représenté comme ci-contre.



ii. Comme la fonction f est continue sur le compact $\mathtt{E}_1$, elle y atteint nécessairement son maximum et son minimum, ce qui assure l'existence de ces derniers. De plus, puisque cette fonction est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}^3$, donc sur $\mathtt{E}_1$, le maximum et le minimum recherchés se trouvent nécessairement soit parmi les points stationnaires de f situés à l'intérieur de $\mathtt{E}_1$, soit sur la frontière de $\mathtt{E}_1$.

Étude des points stationnaires de f
Les points stationnaires de f vérifient

$$\nabla f = \mathbf{0} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = yz = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial z} = xy = 0 \end{cases}$$

et correspondent donc aux points dont au moins deux coordonnées sont nulles. Les points stationnaires appartenant à $\mathtt{E}_1$ étant caractérisés par x et/ou $y = 0$, ils sont situés sur la frontière de $\mathtt{E}_1$.

La fonction f s'annule en ces points stationnaires alors que f prend des valeurs strictement positives sur la partie de $\mathtt{E}_1$ située dans le demi-espace $z > 0$ et des valeurs strictement négatives sur la partie de $\mathtt{E}_1$ avec $z < 0$. Les points stationnaires ne peuvent donc correspondre ni au maximum ni au minimum de f sur $\mathtt{E}_1$.

Étude des points de la frontière de $\mathtt{E}_1$
La frontière de $\mathtt{E}_1$ est constituée de trois surfaces, à savoir

$$\mathcal{S}_1 = \{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0,\ \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1\}, \qquad \mathcal{S}_2 = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ x^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1\}$$

et

$$\mathcal{S}_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1\}$$

dont les deux premières contiennent des points en lesquels la fonction f s'annule et où la fonction f ne peut donc présenter ses valeurs extrémales. Le minimum et le maximum recherchés ne se trouvent donc ni sur $\mathcal{S}_1$, ni sur $\mathcal{S}_2$, mais bien sur $\mathcal{S}_3$.

Le minimum et le maximum de f sur $\mathcal{S}_3$ peuvent être recherchés parmi les solutions du problème d'optimisation

$$\mathcal{P}_1 \left| \begin{array}{l} \text{max. (resp. min.) de } f(x,y,z) = xyz \\ \\ \text{s. c. } g(x,y,z) = x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} - 1 = 0 \end{array} \right.$$

pour lesquelles $x > 0$ et $y > 0$ (les points tels que $x = 0$ ou $y = 0$ ayant déjà été considérés précédemment puisque ce sont des points de $\mathcal{S}_1$ ou $\mathcal{S}_2$).

Comme f et g sont différentiables sur $\mathbb{R}^3$ (puisque ces fonctions sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^3$) et comme

$$\nabla g = 2x\mathbf{e}_x + \frac{y}{2}\mathbf{e}_y + \frac{2z}{9}\mathbf{e}_z \neq \mathbf{0}$$

sur $\mathcal{S}_3$, toute solution de $\mathcal{P}_1$ se trouve parmi les points stationnaires du Lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = xyz - \lambda\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1\right)$$

Ceux-ci vérifient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = yz - 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = xz - \dfrac{\lambda}{2}y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = xy - \dfrac{2\lambda}{9}z = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -\left(x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} - 1\right) = 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations mènent à

$$\lambda = \frac{yz}{2x} = \frac{2xz}{y} \quad \text{soit} \quad y^2 z = 4x^2 z$$

et, puisque $x, y > 0$, les solutions pour lesquelles $z = 0$ peuvent être écartées vu la troisième équation, ce qui conduit à

$$y = 2x \qquad \text{(le cas } y = -2x \text{ étant à rejeter puisque } x \text{ et } y \text{ sont de même signe)}$$

En tenant compte de la première équation pour éliminer λ de la troisième, on obtient

$$xy - \frac{yz^2}{9x} = 0 \quad \text{ou encore} \quad z^2 = 9x^2 \quad \text{soit} \quad z = \pm 3x$$

de sorte que la dernière équation équivaut finalement à

$$3x^2 = 1 \quad \text{soit} \quad x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{vu que } x > 0)$$

Les points stationnaires du Lagrangien sont donc

$$(x_1, y_1, z_1, \lambda_1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$$

et

$$(x_2, y_2, z_2, \lambda_2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right).$$

Vu ce qui précède, nous sommes assurés de l'existence du minimum et du maximum recherchés et de leur présence parmi ces points. Il suffit dès lors de comparer les valeurs prises par fonction f en ces points. On constate que

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},-\sqrt{3}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}<f\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

et on conclut finalement que la fonction f possède

- un minimum en $(x_1,y_1,z_1)=\left(\sqrt{3}/3,2\sqrt{3}/3,-\sqrt{3}\right)$, en lequel elle prend la valeur $-2\sqrt{3}/3$;
- un maximum en $(x_2,y_2,z_2)=\left(\sqrt{3}/3,2\sqrt{3}/3,\sqrt{3}\right)$, en lequel elle prend la valeur $2\sqrt{3}/3$.

iii. Un raisonnement identique au précédent permet de conclure que le maximum de f sur $\mathtt{E}_C$ sera la solution du problème d'optimisation

$$\mathcal{P}_C\left|\begin{array}{l}\text{max. de } f(x,y,z)=xyz\\ \text{s. c. } g(x,y,z)=x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}-C=0\end{array}\right.$$

c'est-à-dire un des points stationnaires du Lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)=xyz-\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}-C\right)$$

Or, si on note ce point stationnaire (x^*,y^*,z^*,λ^*), le multiplicateur de Lagrange λ^* correspond à $F'(C)$ où $F(C)$ désigne la valeur maximale de f sur l'ensemble $\mathtt{E}_C$. Ainsi, vu le point précédent, puisque le multiplicateur de Lagrange correspondant au maximum du problème $\mathcal{P}_C$ lorsque $C=1$ est $\lambda^*=\lambda_2$, on a directement

$$F'(1)=\lambda_2=\sqrt{3}$$