LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2020

MATH0002 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

- *Durée de l'épreuve : 4 heures.*
- *Cet examen est à livre ouvert. Les calculatrices sont autorisées.*
- *Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.*
- *Indiquez lisiblement votre NOM en majuscules suivi de votre Prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque face et numérotez-la.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche pour cette question avec votre NOM et votre Prénom.*
- *Vos copies doivent impérativement être transmises au format pdf, en quatre fichiers distincts correspondant aux quatre questions de cet examen et dont les noms sont construits sur le modèle NOM_Prenom_Q1.pdf, NOM_Prenom_Q2.pdf, NOM_Prenom_Q3.pdf et NOM_Prenom_Q4.pdf.*

Question 1

i. Si $\dfrac{f(x)}{g(x)} = O(x^2)$, $(x \to +\infty)$, peut-on affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$? Justifiez.

ii. Le taux de croissance μ d'une culture d'algues dépend de la température T et de la concentration des nutriments N par une relation du type $\mu = \mu(T,N)$. Si $T = T(x,y,z,t)$ et $N = N(x,y,z,t)$ où x, y, et z désignent les trois coordonnées de l'espace et où t est le temps, déterminez l'expression de

$$\frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{où} \quad M(x,y,z,t) = \mu\big[T(x,y,z,t), N(x,y,z,t)\big]$$

Sous quelles hypothèses ce résultat peut-il être justifié ?

iii. Les fonctions $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ et $y_2(x) = x$ constituent-elles un ensemble fondamental de solutions de l'équation $(1-x)y'' + xy' - y = 0$ sur $]0,1[$? Justifiez.

iv. La fonction $f(x) = 1 + x + \mathrm{e}^x$ admet-elle une fonction réciproque $g \in C_1(\mathbb{R})$? Justifiez. Dans l'affirmative, que vaut $g'(2)$?

v. Dans le cas particulier où $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x)$, $\mathbf{f}$ étant continûment dérivable sur tout l'espace, et $\mathbf{g}$ est un vecteur constant parallèle à $\mathbf{e}_z$, évaluez les deux membres de la relation

$$\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = \mathbf{f}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{g}) + \mathbf{g}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{f}) + (\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g} + (\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}$$

et vérifiez l'égalité.

Question 2

i. Déterminez le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2(x)$ de degré 2 en $(x-1)$ qui approche la fonction $f(x) = \ln x$ au voisinage de $a = 1$. Précisez pour quelles valeurs de x cette approximation est valable. Justifiez.

ii. Déterminez l'expression de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ associée à l'approximation de $f(x)$ par $\mathcal{P}_2(x)$ sur $[1, 1+u]$ où $u > 0$.

iii. Déterminez la plus grande valeur de $u > 0$ pour laquelle le polynôme $\mathcal{P}_2(x)$ approche $f(x)$ sur $[1, 1+u]$ avec une erreur absolue inférieure à 10^{-3}.

Question 3

On considère le problème différentiel

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = \dfrac{1}{\sin 2t} \\ \\ y(\pi/4) = 0, \quad y'(\pi/4) = 0 \end{cases}$$

i. Dans quel intervalle peut-on assurer l'existence et l'unicité de la solution ? Justifiez.

ii. Déterminez la solution du problème différentiel dans cet intervalle.

Question 4

On recherche le minimum de y sur le domaine

$$\mathtt{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = c,\ x^2 + y^2 - 4z = 0\right\}$$

où c désigne une constante.

i. Esquissez $\mathtt{E}$ dans le cas où $c = 7$.

ii. Déterminez la position et la valeur du minimum dans le cas où $c = 7$.

iii. Soit $m(c)$ la valeur minimale de la fonction cible du problème d'optimisation ci-dessus. Déterminez $m'(7)$.

SOLUTION TYPE

Question 1

i. Non, cette affirmation est fausse. Considérons $f(x) = x^{-1}$ et $g(x) = x^{-3}$. On a bien

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^2 = O[x^2], \quad (x \to +\infty)$$

Cependant,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

ii. Si $M(x,y,z,t) = \mu[T(x,y,z,t), N(x,y,z,t)]$, le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial z}(x,y,z,t) = \frac{\partial \mu}{\partial T}[T(x,y,z,t),N(x,y,z,t)]\frac{\partial T}{\partial z}(x,y,z,t) \\ + \frac{\partial \mu}{\partial N}[T(x,y,z,t),N(x,y,z,t)]\frac{\partial N}{\partial z}(x,y,z,t) \end{aligned}$$

Cette expression est valable sur tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ sur lequel les fonctions réelles T et N sont dérivables et tel que μ est continûment dérivable sur un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^2$ pour lequel $[T(x,y,z,t), N(x,y,z,t)] \in \omega$ pour tout $(x,y,z,t) \in \Omega$.

iii. Les fonctions y_1 et y_2 forment un système fondamental de solutions sur $]0,1[$ si elles vérifient l'équation et sont linéairement indépendantes sur $]0,1[$.
Notons tout d'abord que les fonctions

$$y_1(x) = \mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad y_2(x) = x$$

sont des solutions de l'équation différentielle $(1-x)y'' + xy' - y = 0$ sur $]0,1[$. En effet, $\forall x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \mathrm{e}^x \qquad & y_1''(x) &= \mathrm{e}^x \\ y_2'(x) &= 1 \qquad & y_2''(x) &= 0 \end{aligned}$$

de sorte que

$$(1-x)y_{1,2}''(x) + xy_{1,2}'(x) - y_{1,2}(x) = 0$$

De plus, les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes sur $]0,1[$ puisque leur Wronskien

$$\mathrm{W}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & x \\ \mathrm{e}^x & 1 \end{vmatrix} = (1-x)\,\mathrm{e}^x$$

ne s'annule pas identiquement sur $]0,1[$.
Dès lors, les fonctions y_1 et y_2 forment un système fondamental de solutions sur $]0,1[$.

iv. La fonction $f(x) = 1 + x + \mathrm{e}^x$ est réelle et continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= \mathbb{R} \\ f'(x) &= 1 + \mathrm{e}^x > 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

Par le théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques, on en conclut que f possède une fonction réciproque $g \in C_1(\mathbb{R})$. Sa dérivée est donnée par

$$g'(x) = \left. \frac{1}{f'(y)} \right|_{y=g(x)} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{g(x)}}$$

Puisque $f(0) = 2$, on a $g(2) = 0$ et, utilisant l'expression de $g'(x)$ obtenue ci-dessus,

$$g'(2) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^0} = \frac{1}{2}$$

v. Dans le cas où $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x) = f_x(x)\mathbf{e}_x + f_y(x)\mathbf{e}_y + f_z(x)\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{g} = c\,\mathbf{e}_z$ où c est une constante, on calcule aisément

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) &= \nabla\Big(c\, f_z(x)\Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(c\, f_z(x)\Big)\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\Big(c\, f_z(x)\Big)\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\Big(c\, f_z(x)\Big)\mathbf{e}_z \\ &= c\frac{\partial f_z}{\partial x}\,\mathbf{e}_x \\ \nabla \wedge \mathbf{g} &= \mathbf{0} \quad \text{puisque } \mathbf{g} \text{ est constant} \\ \nabla \wedge \mathbf{f} &= \left(\frac{\partial f_z(x)}{\partial y} - \frac{\partial f_y(x)}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial f_x(x)}{\partial z} - \frac{\partial f_z(x)}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial f_y(x)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x)}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z \\ &= -\frac{\partial f_z}{\partial x}\,\mathbf{e}_y + \frac{\partial f_y}{\partial x}\,\mathbf{e}_z \\ \mathbf{g} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{f}) &= c\,\mathbf{e}_z \wedge \left(-\frac{\partial f_z}{\partial x}\,\mathbf{e}_y + \frac{\partial f_y}{\partial x}\,\mathbf{e}_z\right) = -c\frac{\partial f_z}{\partial x}\,\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_y = c\frac{\partial f_z}{\partial x}\,\mathbf{e}_x \\ (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} &= \mathbf{0} \quad \text{puisque } \mathbf{g} \text{ est constant} \\ (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} &= c\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{f}(x) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

de sorte que l'égalité proposée

$$\nabla(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{f} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{g}) + \mathbf{g} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{f}) + (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f}$$

s'écrit

$$c\frac{\partial f_z}{\partial x}\,\mathbf{e}_x = \mathbf{0} + c\frac{\partial f_z}{\partial x}\,\mathbf{e}_x + \mathbf{0} + \mathbf{0}$$

et est bien vérifiée.

Question 2

i. La fonction $f(x) = \ln x$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathtt{I} =]0, +\infty[$, on peut lui appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $a = 1$ pour tout x appartenant à $\mathtt{I}$.

En effet, la fonction vérifie alors les hypothèses de la formule de Taylor puisqu'elle est réelle, 2 fois continûment dérivable sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$) et 3 fois dérivable sur $]1, x[$ (ou $]x, 1[$).

Le polynôme recherché s'écrit

$$\mathcal{P}_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

On calcule successivement

$$f(x) = \ln x, \qquad f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f''(1) = -1$$

de sorte que le polynôme de Taylor est

$$\mathcal{P}_2(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}$$

Cette approximation est valable pour tout $x \in]0, +\infty[$.

ii. L'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ associée à l'approximation de $f(x)$ par $\mathcal{P}_2(x)$ pour $x \in [1, 1+u]$ est donnée par

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 \quad \text{où} \quad \xi \in]1, x[$$

La dérivation de l'expression de f'' obtenue plus haut conduit à

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

de sorte que

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{1}{3\xi^3}(x-1)^3 \quad \text{avec} \quad \xi \in]1, x[$$

iii. Pour tout $x \in [1, 1+u]$, $\xi \in]1, 1+u[$ et on a

$$\frac{1}{3\xi^3} \leq \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad |(x-1)^3| \leq u^3$$

de sorte que

$$|\mathcal{R}_2(x)| \leq \frac{u^3}{3}$$

Pour ne pas dépasser l'erreur absolue demandée, il convient de choisir u tel que

$$\frac{u^3}{3} \leq 10^{-3} \quad \text{soit} \quad u^3 \leq \frac{3}{1000} \quad \text{donc} \quad u \leq \frac{\sqrt[3]{3}}{10}$$

Question 3

i. Puisque l'équation donnée

$$y''(t)+4y(t)=\frac{1}{\sin 2t}$$

est une équation différentielle linéaire, l'existence et l'unicité de la solution du problème posé sont garanties sur l'intervalle $]0,\pi/2[$. En effet, les coefficients de y et y'' ainsi que la fonction $1/\sin 2t$ du second membre sont continus sur cet intervalle et les conditions auxiliaires sont données sous la forme de conditions de Cauchy au point $t=\pi/4\in]0,\pi/2[$.

ii. Il s'agit d'une équation différentielle non homogène. Celle-ci étant linéaire, sa solution générale $y(t)$ peut être écrite comme la somme de la solution générale $y_h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $y_p(t)$ de l'équation non homogène.

Solution générale de l'équation homogène.

L'équation étant linéaire à coefficients constants, nous considérons le polynôme caractéristique associé z^2+4 qui s'annule en $z=2i$ et en $z=-2i$. La solution générale s'écrit alors

$$y_h(t)=C\,\mathrm{e}^{2it}+D\,\mathrm{e}^{-2it}$$

où C et D sont des constantes, ou encore, sous forme réelle,

$$y_h(t)=A\cos 2t+B\sin 2t$$

où A et B sont des constantes.

Solution particulière de l'équation non homogène.

Puisque le second membre de cette équation n'est pas de la forme exponentielle-polynôme, nous allons utiliser la méthode de variation des constantes pour déterminer une solution particulière. Cette méthode nous donne une solution

$$y_p(t)=\left(\int C_1(t)dt\right)y_1(t)+\left(\int C_2(t)dt\right)y_2(t)$$

où $y_1(t)=\cos 2t$ et $y_2(t)=\sin 2t$ constituent un système fondamental de solutions de l'équation homogène du $2^{\text{ème}}$ ordre associée et où C_1 et C_2 vérifient

$$\begin{cases} C_1y_1+C_2y_2=0 \\ C_1y_1'+C_2y_2'=\dfrac{1}{\sin 2t} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} C_1\cos 2t+C_2\sin 2t=0 \\ -2C_1\sin 2t+2C_2\cos 2t=\dfrac{1}{\sin 2t} \end{cases}$$

qui admet comme solution

$$C_1=-\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad C_2=\frac{\cos 2t}{2\sin 2t}$$

On calcule alors les primitives

$$\int C_1(t)dt = -\int \frac{1}{2}\,dt = -\frac{t}{2}$$

et

$$\int C_2(t)dt = \frac{1}{2}\int \frac{\cos 2t}{\sin 2t}\,dt = \frac{1}{4}\ln|\sin 2t| = \frac{1}{4}\ln(\sin 2t)$$

puisque $\sin 2t > 0$ sur $]0,\pi/2[$.
Une solution particulière s'écrit donc

$$y_p(t) = -\frac{t}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\ln(\sin 2t)\,\sin 2t$$

Solution générale de l'équation non homogène.

La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$y(t) = A\cos 2t + B\sin 2t - \frac{t}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\ln(\sin 2t)\,\sin 2t$$

Solution du problème.

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes A et B. On a

$$0 = y(\pi/4) = B$$

et, puisque

$$y'(t) = -2A\sin 2t - \frac{1}{2}\cos 2t + t\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\ln(\sin 2t)\cos 2t$$

on a $0 = y'(\pi/4) = -2A + \pi/4$, ce qui donne $A = \pi/8$.
Finalement, la solution du problème différentiel s'écrit

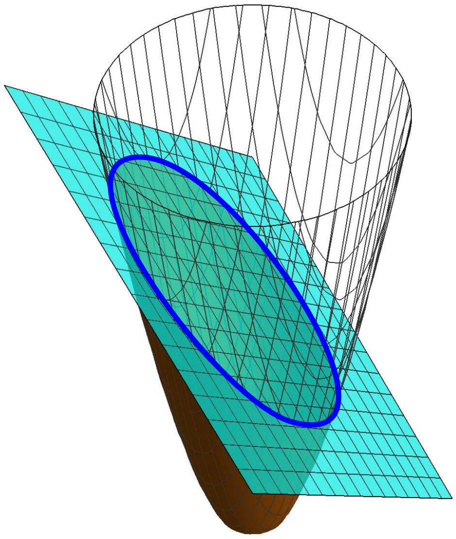
$$y(t) = \frac{\pi}{8}\cos 2t - \frac{t}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\ln(\sin 2t)\,\sin 2t$$

Question 4

i. Dans le cas où $c = 7$, le domaine

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+2z = 7,\ x^2+y^2-4z = 0\right\}$$

se trouve à l'intersection du plan $x+y+2z = 7$ et du paraboloïde $x^2+y^2-4z = 0$. Il s'agit d'une courbe fermée.



ii. Il s'agit d'un problème d'optimisation avec 2 contraintes d'égalité

$$g_1(x,y,z) = x+y+2z-7 = 0 \quad \text{et} \quad g_2(x,y,z) = x^2+y^2-4z = 0$$

La fonction cible $f(x,y,z) = y$ étant continue sur le compact E (courbe fermée de $\mathbb{R}^3$), elle y réalise ses bornes supérieure et inférieure. Le minimum recherché existe donc bien.

Les fonctions f, g_1 et g_2 sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^3$ et donc différentiables. De plus, on peut construire la matrice

$$\mathsf{G} = \left(\nabla g_1(\mathsf{x}) \quad \nabla g_2(\mathsf{x})\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial g_1}{\partial z} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 2y \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Le rang de G est maximum sauf si sa deuxième colonne est un multiple de la première, c'est-à-dire s'il existe α tel que

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{c'est-à-dire} \quad x = y = -1,\ \alpha = -2$$

Comme la solution $x = y = -1$, ne correspond à aucun point de E, on peut conclure que le rang de la matrice est maximum sur E, ce qui garantit que les gradients des contraintes y sont linéairement indépendants.

On en déduit que le minimum à identifier peut être recherché parmi les points stationnaires du Lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = y - \lambda_1(x+y+2z-7) - \lambda_2(x^2+y^2-4z)$$

Ces points stationnaires sont les solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -\lambda_1 - 2\lambda_2 x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = -2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x+y+2z-7) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(x^2+y^2-4z) = 0 \end{cases}$$

La troisième équation donne $\lambda_1 = 2\lambda_2$ de sorte que la première peut s'écrire

$$-2\lambda_2(1+x) = 0$$

Vu que la solution $\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ n'est pas compatible avec la deuxième équation, $x = -1$. Les deux dernières équations donnent alors le système de 2 équations à 2 inconnues

$$\begin{cases} y+2z-8=0 \\ y^2+1-4z=0 \end{cases}$$

En additionnant 2 fois la première équation à la deuxième, on obtient $y^2+2y-15=0$ qui admet les zéros -5 et 3. Si $y=-5$, $z=13/2$. La valeur minimale de la fonction cible $f(x,y,z)=y$ est donc -5 et elle est réalisée au point

$$\mathrm{x}^\star = (x^\star, y^\star, z^\star) = (-1, -5, 13/2)$$

iii. Dans un problème d'optimisation avec contrainte d'égalité, le multiplicateur relatif à une contrainte mesure la sensibilité de la fonction cible à la valeur de la contrainte. Dès lors, pour obtenir la sensibilité de la valeur minimale de la fonction cible obtenue ci-dessus à la valeur de c, il suffit de poursuivre la résolution entamée au point précédent en déterminant le multiplicateur de Lagrange $\lambda_1^\star$ correspondant à la solution optimale obtenue pour $c=7$.
On a, tenant compte de $\lambda_1 = 2\lambda_2$,

$$1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 y = 1 - \lambda_1 - \lambda_1 y = 0$$

soit

$$m'(7) = \lambda_1^\star = \frac{1}{1+y^\star} = -\frac{1}{4}$$