LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2020

MATH0002 - Analyse Mathématique 1

Examen

- *Durée de l'épreuve : 4 heures.*
- *Cet examen est à livre ouvert. Les calculatrices sont autorisées.*
- *Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.*
- *Indiquez lisiblement votre NOM en majuscules suivi de votre Prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque face et numérotez-la.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche pour cette question avec votre NOM et votre Prénom.*
- *Vos copies doivent impérativement être transmises au format pdf, en quatre fichiers distincts correspondant aux quatre questions de cet examen et dont les noms sont construits sur le modèle NOM_Prenom_Q1.pdf, NOM_Prenom_Q2.pdf, NOM_Prenom_Q3.pdf et NOM_Prenom_Q4.pdf.*

Question 1

i. Si $\dfrac{f(x)}{g(x)} = O\left[(x-x_0)^2\right]$, $(x \to x_0)$, peut-on affirmer que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$? Justifiez.

ii. L'équation d'état d'un gaz permet de relier l'énergie interne par unité de masse e à l'entropie spécifique s et à la masse volumique ρ par une relation du type $e = e(s,\rho)$. Si les champs de l'entropie spécifique et de la masse volumique sont décrits par $s = s(x,y,z,t)$ et $\rho = \rho(x,y,z,t)$ où x, y, et z désignent les trois coordonnées de l'espace et où t est le temps, déterminez l'expression de

$$\frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{où} \quad E(x,y,z,t) = e\big[s(x,y,z,t),\rho(x,y,z,t)\big]$$

Sous quelles hypothèses ce résultat peut-il être justifié ?

iii. Les fonctions $y_1(x) = x$ et $y_2(x) = x\ln x$ constituent-elles un ensemble fondamental de solutions de l'équation $x^2y'' - xy' + y = 0$ sur $]0,+\infty[$? Justifiez.

iv. La fonction $f(x) = x^2 + \ln x$ admet-elle une fonction réciproque $g \in C_1(\mathbb{R})$? Justifiez. Dans l'affirmative, que vaut $g'(\mathrm{e}^2+1)$?

v. Dans le cas particulier où $\mathbf{f} = \mathbf{f}(y)$, $\mathbf{f}$ étant continûment dérivable sur tout l'espace, et $\mathbf{g}$ est un vecteur constant parallèle à $\mathbf{e}_z$, évaluez les deux membres de la relation

$$\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = \mathbf{f}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{g}) + \mathbf{g}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{f}) + (\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g} + (\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}$$

et vérifiez l'égalité.

Question 2

i. Déterminez le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2(x)$ de degré 2 en $(x-1)$ qui approche la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ au voisinage de $a=1$. Précisez pour quelles valeurs de x cette approximation est valable. Justifiez.

ii. Déterminez l'expression de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ associée à l'approximation de $f(x)$ par $\mathcal{P}_2(x)$ sur $[1,1+u]$ où $u>0$.

iii. Déterminez la plus grande valeur de $u>0$ pour laquelle le polynôme $\mathcal{P}_2(x)$ approche $f(x)$ sur $[1,1+u]$ avec une erreur absolue inférieure à 10^{-3}.

Question 3

On considère le problème différentiel

$$\begin{cases} y''(t)+y(t)=\dfrac{1}{\cos t} \\ \\ y(0)=0, \quad y'(0)=1 \end{cases}$$

i. Dans quel intervalle peut-on assurer l'existence et l'unicité de la solution ? Justifiez.

ii. Déterminez la solution du problème différentiel dans cet intervalle.

Question 4

On recherche le minimum de x sur le domaine

$$\mathtt{E}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+2z=c,\ x^2+y^2-4z=0\right\}$$

où c désigne une constante.

i. Esquissez $\mathtt{E}$ dans le cas où $c=1$.

ii. Déterminez la position et la valeur du minimum dans le cas où $c=1$.

iii. Soit $m(c)$ la valeur minimale de la fonction cible du problème d'optimisation ci-dessus. Déterminez $m'(1)$.

SOLUTION TYPE

Question 1

i. Non, cette affirmation est fausse. Considérons $f(x) = (x - x_0)^{-1}$ et $g(x) = (x - x_0)^{-3}$. On a bien

$$\frac{f(x)}{g(x)} = (x - x_0)^2 = O[(x - x_0)^2], \quad (x \to x_0)$$

Cependant,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

ii. Si $E(x,y,z,t) = e[s(x,y,z,t), \rho(x,y,z,t)]$, le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'écrire

$$\frac{\partial E}{\partial t}(x,y,z,t) = \frac{\partial e}{\partial s}[s(x,y,z,t), \rho(x,y,z,t)] \frac{\partial s}{\partial t}(x,y,z,t) + \frac{\partial e}{\partial \rho}[s(x,y,z,t), \rho(x,y,z,t)] \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,y,z,t)$$

Cette expression est valable sur tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ sur lequel les fonctions réelles s et ρ sont dérivables et tel que e est continûment dérivable sur un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^2$ pour lequel $[s(x,y,z,t), \rho(x,y,z,t)] \in \omega$ pour tout $(x,y,z,t) \in \Omega$.

iii. Les fonctions y_1 et y_2 forment un système fondamental de solutions sur $]0,+\infty[$ si elles vérifient l'équation et sont linéairement indépendantes sur $]0,+\infty[$.
Notons tout d'abord que les fonctions

$$y_1(x) = x \qquad \text{et} \qquad y_2(x) = x \ln x$$

sont des solutions de l'équation différentielle $x^2 y'' - xy' + y = 0$ sur $]0,+\infty[$. En effet, $\forall x \in]0,+\infty[$,

$$\begin{array}{ll} y_1'(x) = 1 & y_1''(x) = 0 \\ y_2'(x) = \ln x + 1 & y_2''(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

de sorte que

$$x^2 y_{1,2}''(x) - x y_{1,2}'(x) + y_{1,2}(x) = 0$$

De plus, les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes sur $]0,+\infty[$ puisque leur Wronskien

$$\mathsf{W}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x \ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} = x$$

ne s'annule pas identiquement sur $]0,+\infty[$.
Dès lors, les fonctions y_1 et y_2 forment un système fondamental de solutions sur $]0,+\infty[$.

iv. La fonction $f(x) = x^2 + \ln x$ est réelle et continûment dérivable sur $]0, +\infty[$ avec

$$
\begin{aligned}
&f(]0, +\infty[) = \mathbb{R} \\
&f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0 \qquad \text{sur }]0, +\infty[
\end{aligned}
$$

Par le théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques, on en conclut que f possède une fonction réciproque $g \in C_1(\mathbb{R})$. Sa dérivée est donnée par

$$g'(x) = \left.\frac{1}{f'(y)}\right|_{y=g(x)} = \frac{1}{2g(x) + \dfrac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{2g^2(x) + 1}$$

Puisque $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^2 + 1$, on a $g(\mathrm{e}^2 + 1) = \mathrm{e}$ et, utilisant l'expression de $g'(x)$ obtenue ci-dessus,

$$g'(\mathrm{e}^2 + 1) = \frac{\mathrm{e}}{2\mathrm{e}^2 + 1}$$

v. Dans le cas où $\mathbf{f} = \mathbf{f}(y) = f_x(y)\mathbf{e}_x + f_y(y)\mathbf{e}_y + f_z(y)\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{g} = c\,\mathbf{e}_z$ où c est une constante, on calcule aisément

$$
\begin{aligned}
\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) &= \nabla\Big(c f_z(y)\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\Big(c f_z(y)\Big)\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\Big(c f_z(y)\Big)\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\Big(c f_z(y)\Big)\mathbf{e}_z \\
&= c\frac{\partial f_z}{\partial y}\,\mathbf{e}_y \\
\nabla\wedge\mathbf{g} &= \mathbf{0} \quad \text{puisque } \mathbf{g} \text{ est constant} \\
\nabla\wedge\mathbf{f} &= \left(\frac{\partial f_z(y)}{\partial y} - \frac{\partial f_y(y)}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial f_x(y)}{\partial z} - \frac{\partial f_z(y)}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial f_y(y)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(y)}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z \\
&= \frac{\partial f_z}{\partial y}\,\mathbf{e}_x - \frac{\partial f_x}{\partial y}\,\mathbf{e}_z \\
\mathbf{g}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{f}) &= c\,\mathbf{e}_z \wedge \left(\frac{\partial f_z}{\partial y}\,\mathbf{e}_x - \frac{\partial f_x}{\partial y}\,\mathbf{e}_z\right) = c\frac{\partial f_z}{\partial y}\,\mathbf{e}_z\wedge\mathbf{e}_x = c\frac{\partial f_z}{\partial y}\,\mathbf{e}_y \\
(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g} &= \mathbf{0} \quad \text{puisque } \mathbf{g} \text{ est constant} \\
(\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f} &= c\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{f}(y) = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

de sorte que l'égalité proposée

$$\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = \mathbf{f}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{g}) + \mathbf{g}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{f}) + (\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g} + (\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}$$

s'écrit

$$c\frac{\partial f_z}{\partial y}\,\mathbf{e}_y = \mathbf{0} + c\frac{\partial f_z}{\partial y}\,\mathbf{e}_y + \mathbf{0} + \mathbf{0}$$

et est bien vérifiée.

Question 2

i. La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathtt{I} =]0, +\infty[$, on peut lui appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $a = 1$ pour tout x appartenant à $\mathtt{I}$.

En effet, la fonction vérifie alors les hypothèses de la formule de Taylor puisqu'elle est réelle, 2 fois continûment dérivable sur $[1, x]$ (ou $[x, 1]$) et 3 fois dérivable sur $]1, x[$ (ou $]x, 1[$).

Le polynôme recherché s'écrit

$$\mathcal{P}_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

On calcule successivement

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}}, \qquad f''(1) = -\frac{1}{4}$$

de sorte que le polynôme de Taylor est

$$\mathcal{P}_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$$

Cette approximation est valable pour tout $x \in]0, +\infty[$.

ii. L'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ associée à l'approximation de $f(x)$ par $\mathcal{P}_2(x)$ pour $x \in [1, 1+u]$ est donnée par

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 \quad \text{où} \quad \xi \in]1, x[$$

La dérivation de l'expression de f'' obtenue plus haut conduit à

$$f'''(x) = \frac{3}{8x^{5/2}}$$

de sorte que

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{1}{16\xi^{5/2}}(x-1)^3 \quad \text{avec} \quad \xi \in]1, x[$$

iii. Pour tout $x \in [1, 1+u]$, $\xi \in]1, 1+u[$ et on a

$$\frac{1}{16\xi^{5/2}} \leq \frac{1}{16} \quad \text{et} \quad |(x-1)^3| \leq u^3$$

de sorte que

$$|\mathcal{R}_2(x)| \leq \frac{u^3}{16}$$

Pour ne pas dépasser l'erreur absolue demandée, il convient de choisir u tel que

$$\frac{u^3}{16} \leq 10^{-3} \quad \text{soit} \quad u^3 \leq \frac{16}{1000} \quad \text{donc} \quad u \leq \frac{\sqrt[3]{2}}{5}$$

Question 3

i. Puisque l'équation donnée
$$y''(t)+y(t)=\frac{1}{\cos t}$$
est une équation différentielle linéaire, l'existence et l'unicité de la solution du problème posé sont garanties sur l'intervalle $]-\pi/2,\pi/2[$. En effet, les coefficients de y et y'' ainsi que la fonction $1/\cos t$ du second membre sont continus sur cet intervalle et les conditions auxiliaires sont données sous la forme de conditions de Cauchy au point $t=0\in]-\pi/2,\pi/2[$.

ii. Il s'agit d'une équation différentielle non homogène. Celle-ci étant linéaire, sa solution générale $y(t)$ peut être écrite comme la somme de la solution générale $y_h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $y_p(t)$ de l'équation non homogène.

Solution générale de l'équation homogène.

L'équation étant linéaire à coefficients constants, nous considérons le polynôme caractéristique associé z^2+1 qui s'annule en $z=i$ et en $z=-i$. La solution générale s'écrit alors
$$y_h(t)=C\,\mathrm{e}^{it}+D\,\mathrm{e}^{-it}$$
où C et D sont des constantes, ou encore, sous forme réelle,
$$y_h(t)=A\cos t+B\sin t$$
où A et B sont des constantes.

Solution particulière de l'équation non homogène.

Puisque le second membre de cette équation n'est pas de la forme exponentielle-polynôme, nous allons utiliser la méthode de variation des constantes pour déterminer une solution particulière. Cette méthode nous donne une solution
$$y_p(t)=\left(\int C_1(t)dt\right)y_1(t)+\left(\int C_2(t)dt\right)y_2(t)$$
où $y_1(t)=\cos t$ et $y_2(t)=\sin t$ constituent un système fondamental de solutions de l'équation homogène du 2$^{\text{ème}}$ ordre associée et où C_1 et C_2 vérifient
$$\begin{cases} C_1y_1+C_2y_2=0 \\ C_1y_1'+C_2y_2'=\dfrac{1}{\cos t}\end{cases}$$
soit
$$\begin{cases} C_1\cos t+C_2\sin t=0 \\ -C_1\sin t+C_2\cos t=\dfrac{1}{\cos t}\end{cases}$$
qui admet comme solution $C_1=-\operatorname{tg} t$ et $C_2=1$.
On calcule alors les primitives
$$\int C_2(t)dt=\int dt=t$$

et

$$\int C_1(t)dt = \int -\mathrm{tg}\, t\, dt = \int \frac{-\sin t}{\cos t}\, dt = \ln|\cos t| = \ln(\cos t)$$

puisque $\cos t > 0$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
Une solution particulière s'écrit donc

$$y_p(t) = \ln(\cos t)\cos t + t\sin t$$

Solution générale de l'équation non homogène.

La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$y(t) = A\cos t + B\sin t + \ln(\cos t)\cos t + t\sin t$$

Solution du problème.

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes A et B. On a

$$0 = y(0) = A$$

et, puisque

$$y'(t) = B\cos t - \ln(\cos t)\sin t - \sin t + \sin t + t\cos t$$

on a $1 = y'(0) = B$, ce qui donne $B = 1$.
Finalement, la solution du problème différentiel s'écrit

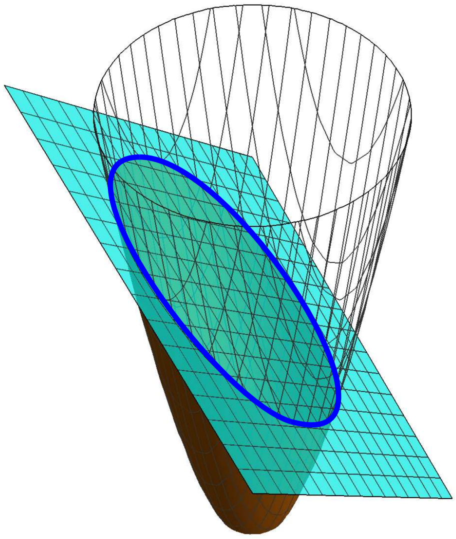
$$y(t) = \ln(\cos t)\cos t + (1+t)\sin t$$

Question 4

i. Dans le cas où $c = 1$, le domaine

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+2z = 1,\ x^2+y^2-4z = 0\right\}$$

se trouve à l'intersection du plan $x+y+2z = 1$ et du paraboloïde $x^2+y^2-4z = 0$. Il s'agit d'une courbe fermée.



ii. Il s'agit d'un problème d'optimisation avec 2 contraintes d'égalité

$$g_1(x,y,z) = x+y+2z-1 = 0 \quad \text{et} \quad g_2(x,y,z) = x^2+y^2-4z = 0$$

La fonction cible $f(x,y,z) = x$ étant continue sur le compact E (courbe fermée de $\mathbb{R}^3$), elle y réalise ses bornes supérieure et inférieure. Le minimum recherché existe donc bien.

Les fonctions f, g_1 et g_2 sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^3$ et donc différentiables. De plus, on peut construire la matrice

$$\mathsf{G} = \left(\nabla g_1(\mathsf{x}) \quad \nabla g_2(\mathsf{x})\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial g_1}{\partial z} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 2y \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Le rang de G est maximum sauf si sa deuxième colonne est un multiple de la première, c'est-à-dire s'il existe α tel que

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = y = -1,\ \alpha = -2$$

Comme la solution $x = y = -1$, ne correspond à aucun point de E, on peut conclure que le rang de la matrice est maximum sur E, ce qui garantit que les gradients des contraintes y sont linéairement indépendants.

On en déduit que le minimum à identifier peut être recherché parmi les points stationnaires du Lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x - \lambda_1(x+y+2z-1) - \lambda_2(x^2+y^2-4z)$$

Ces points stationnaires sont les solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -\lambda_1 - 2\lambda_2 y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = -2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x+y+2z-1) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(x^2+y^2-4z) = 0 \end{cases}$$

La troisième équation donne $\lambda_1 = 2\lambda_2$ de sorte que la deuxième peut s'écrire

$$-2\lambda_2(1+y) = 0$$

Vu que la solution $\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ n'est pas compatible avec la première équation, $y = -1$. Les deux dernières équations donnent alors le système de 2 équations à 2 inconnues

$$\begin{cases} x + 2z - 2 = 0 \\ x^2 + 1 - 4z = 0 \end{cases}$$

En additionnant 2 fois la première équation à la deuxième, on obtient $x^2 + 2x - 3 = 0$ qui admet les zéros -3 et 1. Si $x = -3$, $z = 5/2$. La valeur minimale de la fonction cible $f(x,y,z) = x$ est donc -3 et elle est réalisée au point

$$\mathrm{x}^\star = (x^\star, y^\star, z^\star) = (-3, -1, 5/2)$$

iii. Dans un problème d'optimisation avec contrainte d'égalité, le multiplicateur relatif à une contrainte mesure la sensibilité de la fonction cible à la valeur de la contrainte. Dès lors, pour obtenir la sensibilité de la valeur minimale de la fonction cible obtenue ci-dessus à la valeur de c, il suffit de poursuivre la résolution entamée au point précédent en déterminant le multiplicateur de Lagrange $\lambda_1^\star$ correspondant à la solution optimale obtenue pour $c = 1$.
On a, tenant compte de $\lambda_1 = 2\lambda_2$,

$$1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 x = 1 - \lambda_1 - \lambda_1 x = 0$$

soit

$$m'(1) = \lambda_1^\star = \frac{1}{1+x^\star} = -\frac{1}{2}$$