Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2020

MATH0002 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1

EXAMEN

- *Durée de l'épreuve : 4 heures.*
- *Cet examen est à livre ouvert. Les calculatrices sont autorisées.*
- *Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.*
- *Indiquez lisiblement votre NOM en majuscules suivi de votre Prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque face et numérotez-la.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche pour cette question avec votre NOM et votre Prénom.*
- *Vos copies doivent impérativement être transmises au format pdf, en quatre fichiers distincts correspondant aux quatre questions de cet examen et dont les noms sont construits sur le modèle NOM_Prenom_Q1.pdf, NOM_Prenom_Q2.pdf, NOM_Prenom_Q3.pdf et NOM_Prenom_Q4.pdf.*

Question 1

i. Si $f(x) = o(x)$ au voisinage de 0, peut-on affirmer que $f^2(x) = o\left(\sin^2 x\right)$ pour $(x \to 0)$? Justifiez.

ii. Définissez mathématiquement $\lim\limits_{y \to -\infty} f(y) = +\infty$.

iii. Quelles hypothèses minimales permettent d'écrire

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)\Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)} = \frac{g(x)}{f'(x)} \quad ?$$

iv. Les fonctions $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ et $x\,\mathrm{e}^x$ sont-elles linéairement indépendantes sur $[0,1]$? Justifiez.

v. Si la matrice hessienne d'une fonction $f \in C_2(\mathbb{R}^2)$ évaluée au point stationnaire $(x_\star, y_\star)$ est égale à

$$\mathsf{H}(x_\star, y_\star) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

peut-on en déduire que f présente un maximum local (non strict) en $(x_\star, y_\star)$? Justifiez.

vi. Soit $\mathbf{f} = f\mathbf{e}_z$ avec $f \in C_1(\mathbb{R}^3)$.
- Exprimez en français l'expression $\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{e}_y)$.
- Évaluez l'expression $\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{e}_y)$.

Question 2

i. Déterminez le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2(x)$ de degré 2 en $(x-1)$ qui approche la fonction

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3+x}}$$

au voisinage de $a = 1$. Précisez pour quelles valeurs de x cette approximation est valable. Justifiez.

ii. Vérifiez que le développement permet d'approcher $f(2)$ par $^{227}/_{256}$.

iii. Déterminez une expression de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ associée à l'approximation de $f(x)$ par $\mathcal{P}_2(x)$.

iv. Déterminez une majoration de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ <u>en fonction de x</u> valable sur $[1,3]$.

v. Comparez la valeur numérique exacte $f(2)$ et son approximation $^{227}/_{256}$. Cette erreur est-elle cohérente avec l'analyse de l'erreur $\mathcal{R}_2$ réalisée en iv. ?

Question 3

On considère le problème différentiel

$$\begin{cases} z''(t) + 4\omega z'(t) + 5\omega^2 z(t) = \omega^2 \Big[1 + \cos(2\omega t)\Big] \\ \\ z(0) = A,\ z(t_\star) = B \end{cases}$$

où $\omega > 0$ désigne un paramètre réel.

i. Déterminez la solution dans le cas où $t_\star = \dfrac{\pi}{2\omega}$, $A = \dfrac{14}{65}$ et $B = 0$.

ii. Pour quelles valeurs de $t_\star$, A et B la solution du problème différentielle est-elle unique ? Justifiez.

Question 4

On considère les relations

$$\begin{cases} x = v^2 - 2u \\ y = v \end{cases}$$

i. Déterminez les plus grands ouverts Ω et Ω' entre lesquels ces relations permettent de définir un changement de variables régulier. Justifiez.

ii. Déterminez l'image $\mathtt{E}'$ de l'ouvert $\mathtt{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ par le changement de variables. Représentez graphiquement $\mathtt{E}'$.

iii. Déterminez l'expression des opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ en fonction des variables u et v.

SOLUTION TYPE

Question 1

i. Puisqu'il existe des voisinages de 0 dans lesquels x et $\sin x$ diffèrent de 0 (excepté en 0), l'hypothèse $f(x) = o(x)$ au voisinage de 0 et la thèse $f^2(x) = o\left(\sin^2 x\right)$ pour $x \to 0$ sont respectivement équivalentes à

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f^2(x)}{\sin^2 x} = 0$$

La thèse est alors démontrée en calculant

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^2(x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{f^2(x)}{x^2} \frac{x^2}{\sin^2 x} \right) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \right)^2 \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \right)^2 = 0 \cdot 1 = 0$$

où on a utilisé l'hypothèse et le fait que, par application de l'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

ii. L'expression $\lim\limits_{y\to -\infty} f(y) = +\infty$ peut être traduite mathématiquement par

$$(\forall M > 0)\,(\exists N > 0)\,(\forall y \in \operatorname{dom} f : y \leq -N) : f(y) \geq M$$

où $\operatorname{dom} f$ désigne le domaine de la fonction f.

iii. La formule proposée repose sur la continuité de la fonction g en x et la dérivabilité de la fonction f en x (avec $f'(x) \neq 0$). Ces conditions permettent effectivement d'écrire

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x+\Delta x)\Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)} = \left(\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x) \right) \left(\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)} \right) = \frac{g(x)}{f'(x)}$$

iv. Les fonctions $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ et $x\mathrm{e}^x$ sont linéairement indépendantes sur $[0,1]$ si leur Wronskien n'est pas identiquement nul sur cet intervalle. Comme

$$W = \begin{vmatrix} \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x & x\mathrm{e}^x \\ \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x & \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x & 2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^x \begin{vmatrix} \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x & x \\ \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x & 1+x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x & 2+x \end{vmatrix}$$

$$= \mathrm{e}^x \begin{vmatrix} \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x & x \\ \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x & 1+x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\,\mathrm{e}^x(\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x) = -2\,\mathrm{e}^x$$

ne s'annule pas sur $[0,1]$, il en résulte que les fonctions $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ et $x\mathrm{e}^x$ sont effectivement linéairement indépendantes sur l'intervalle $[0,1]$.

v. La réponse à la question posée est "non", comme le montre l'exemple de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = -x^2 + y^4$$

Cette fonction est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et stationnaire en $(x_\star, y_\star) = (0,0)$ puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_\star, y_\star) = -2x_\star = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_\star, y_\star) = 4y_\star^3 = 0$$

Cette fonction vérifie encore

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$$

de sorte que sa matrice Hessienne satisfait à

$$H(x_\star, y_\star) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 12y_\star^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La fonction f vérifie donc toutes les hypothèses de l'énoncé.
On constate toutefois que $f(x,0) = -x^2$ présente un maximum en $x = 0$ tandis que $f(0,y) = y^4$ présente un minimum en $y = 0$, de sorte que f, *en tant que fonction de deux variables*, présente un point de selle et non un maximum local en $(0,0)$.

vi.
- Les symboles "$\wedge$" et "$\nabla\wedge$" renvoient respectivement au produit vectoriel et au rotationnel. L'expression $\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{e}_y)$ désigne donc le rotationnel du produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{f}$ et $\mathbf{e}_y$.
- On calcule aisément $\mathbf{f} \wedge \mathbf{e}_y = f\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_y = -f\mathbf{e}_x$. Dès lors, en procédant formellement pour le calcul du déterminant,

$$\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{e}_y) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -f & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_z$$

Question 2

i. La fonction

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3+x}}$$

étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathtt{I} =]-3, +\infty[$, on peut lui appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $a = 1$ pour tout x appartenant à $\mathtt{I}$.
En effet, la fonction vérifie alors les hypothèses de la formule de Taylor puisqu'elle est réelle, 2 fois continûment dérivable sur $[1,x]$ (ou $[x,1]$) et 3 fois dérivable sur $]1,x[$ (ou $]x,1[$).
Le polynôme cherché s'écrit

$$\mathcal{P}_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

On calcule successivement

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{3+x}}, \qquad f(1) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3+x} - \frac{x}{2}\,(3+x)^{-1/2}}{3+x} = \frac{\frac{x}{2}+3}{(3+x)^{3/2}}, \qquad f'(1) = \frac{7}{16}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{2}(3+x)^{3/2} - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}+3\right)(3+x)^{1/2}}{(3+x)^3} = -\frac{3+\frac{x}{4}}{(3+x)^{5/2}}, \qquad f''(1) = -\frac{13}{128}$$

de sorte que le polynôme de Taylor est

$$\mathcal{P}_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{7}{16}(x-1) - \frac{13}{256}(x-1)^2$$

Cette approximation est valable pour tout $x \in]-3, +\infty[$.

ii. En exploitant l'approximation établie au point précédent, la valeur approchée de $f(2)$ est donnée par

$$\mathcal{P}_2(2) = \frac{1}{2} + \frac{7}{16} - \frac{13}{256} = \frac{128+112-13}{256} = \frac{227}{256}$$

comme attendu.

iii. L'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ associée à l'approximation de $f(x)$ par $\mathcal{P}_2(x)$ est donnée par

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3$$

où $\xi \in]1,x[$ (ou $\xi \in]x,1[$). La dérivation de l'expression de f'' obtenue plus haut conduit à

$$f'''(x) = \frac{-\frac{1}{4}(3+x)^{5/2} + \frac{5}{2}\left(3+\frac{x}{4}\right)(3+x)^{3/2}}{(3+x)^5} = \frac{\frac{27}{4}+\frac{3x}{8}}{(3+x)^{7/2}}$$

de sorte que

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{\frac{3}{4}\left(9+\frac{\xi}{2}\right)}{(3+\xi)^{7/2}}\frac{(x-1)^3}{3!} \quad \text{avec} \quad \xi \in]1,x[\quad (\text{ou } \xi \in]x,1[)$$

iv. Si $x \in [1,3]$, $\xi \in]1,x[$ et on a

$$\left|9+\frac{\xi}{2}\right| \leq 9+\frac{x}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{(3+\xi)^{7/2}} \leq \frac{1}{4^{7/2}} = \frac{1}{128}$$

de sorte que

$$|\mathcal{R}_2(x)| \leq \frac{\frac{3}{4}\left(9+\frac{x}{2}\right)}{128}\frac{|x-1|^3}{3!} = \frac{\left(9+\frac{x}{2}\right)}{1024}|x-1|^3$$

v. L'erreur absolue commise en approchant $f(2) = 2/\sqrt{5}$ par $\mathcal{P}_2(2) = 227/256$ est donnée par

$$|f(2) - \mathcal{P}_2(2)| = \left|\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{227}{256}\right| \simeq 0.0077$$

La majoration de l'erreur établie en iv. et évaluée en $x = 2$ est donnée par

$$\frac{10}{1024} \simeq 0.0098$$

ce qui est bien cohérent.

Question 3

i. L'équation différentielle

$$z''(t) + 4\omega z'(t) + 5\omega^2 z(t) = \omega^2\Big[1+\cos(2\omega t)\Big]$$

est linéaire et non homogène. Le théorème de structure affirme que la solution générale est la somme de la solution générale $z_h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $z_p(t)$ de l'équation non homogène.

Équation homogène
L'équation étant linéaire à coefficients constants, on considère le polynôme caractéristique

$$L(\tilde{z}) = \tilde{z}^2 + 4\omega\tilde{z} + 5\omega^2$$

dont les zéros (de multiplicité 1) sont $(-2-i)\omega$ et $(-2+i)\omega$.
La solution générale de l'équation homogène s'écrit donc

$$z_h(t) = C_1\,\mathrm{e}^{(-2+i)\omega t} + C_2\,\mathrm{e}^{(-2-i)\omega t} = \mathrm{e}^{-2\omega t}\left(C_1\,\mathrm{e}^{i\omega t} + C_2\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. Sous forme réelle, cette solution s'écrit

$$z_h(t) = \mathrm{e}^{-2\omega t}\,(C\cos\omega t + D\sin\omega t)$$

où C et D sont des constantes.

Solution particulière de l'équation non homogène
Le second membre peut s'écrire

$$\omega^2\Big[1+\cos(2\omega t)\Big] = f_1(t) + f_2(t) \quad \text{avec} \quad f_1(t) = \omega^2 \quad \text{et} \quad f_2(t) = \omega^2\cos 2\omega t$$

Comme l'équation est linéaire, on peut rechercher une solution particulière de la forme

$$z_p(t) = z_{p1}(t) + z_{p2}(t)$$

où $z_{pi}(t)$ est une solution particulière de

$$z''(t) + 4\omega z'(t) + 5\omega^2 z(t) = f_i(t), \qquad i \in \{1,2\}$$

- Par simple inspection, on constate que $z_{p1}(t) = 1/5$ est une solution de

$$z''(t) + 4\omega z'(t) + 5\omega^2 z(t) = \omega^2$$

- Puisque $2i\omega$ n'est pas un zéro du polynôme caractéristique, on peut rechercher une solution particulière de

$$z''(t) + 4\omega z'(t) + 5\omega^2 z(t) = \omega^2\cos 2\omega t \tag{$\heartsuit$}$$

  de la forme

$$z_{p2}(t) = \beta\cos 2\omega t + \gamma\sin 2\omega t$$

  On calcule successivement

$$z'_{p2}(t) = -2\beta\omega\sin 2\omega t + 2\gamma\omega\cos 2\omega t$$

  et

$$z''_{p2}(t) = -4\beta\omega^2\cos 2\omega t - 4\gamma\omega^2\sin 2\omega t$$

  Substituant ces expressions dans l'équation non homogène ($\heartsuit$), il vient

$$\begin{aligned}-4\beta\omega^2\cos 2\omega t - 4\gamma\omega^2\sin 2\omega t + 4\omega(-2\beta\omega\sin 2\omega t + 2\gamma\omega\cos 2\omega t)&\\ + 5\omega^2(\beta\cos 2\omega t + \gamma\sin 2\omega t) &= \omega^2\cos 2\omega t\end{aligned}$$

  En identifiant les coefficients des fonctions sinus et cosinus, on obtient

$$\begin{cases}-8\beta+\gamma = 0\\ \beta + 8\gamma = 1\end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases}\beta = \dfrac{1}{65}\\ \gamma = \dfrac{8}{65}\end{cases}$$

  Une solution particulière de l'équation ($\heartsuit$) est donc

$$z_{p_2}(t) = \frac{1}{65}\,(\cos 2\omega t + 8\sin 2\omega t)$$

Solution générale de l'équation non homogène
La solution générale de l'équation non homogène est

$$z(t) = \mathrm{e}^{-2\omega t}\left(C\cos\omega t + D\sin\omega t\right) + \frac{1}{5} + \frac{1}{65}\left(\cos 2\omega t + 8\sin 2\omega t\right)$$

Solution du problème
Les constantes C et D peuvent être déterminées en exploitant les conditions auxiliaires. D'une part, on a

$$z(0) = \frac{14}{65} = C + \frac{1}{5} + \frac{1}{65} \qquad \Rightarrow \qquad C = 0$$

Ensuite, exploitant ce résultat, il vient

$$z\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = 0 = \mathrm{e}^{-\pi} D + \frac{1}{5} - \frac{1}{65}$$

de sorte que

$$D = -\frac{12}{65}\,\mathrm{e}^{\pi}$$

La solution du problème différentiel est donc

$$z(t) = -\frac{12}{65}\,\mathrm{e}^{\pi}\,\mathrm{e}^{-2\omega t}\sin\omega t + \frac{1}{5} + \frac{1}{65}\left(\cos 2\omega t + 8\sin 2\omega t\right)$$

ii. La solution du problème différentiel est unique si les conditions auxiliaires

$$\begin{cases} z(0) = A = C + z_p(0) \\ z(t_\star) = B = \mathrm{e}^{-2\omega t_\star}\left(C\cos\omega t_\star + D\sin\omega t_\star\right) + z_p(t_\star) \end{cases}$$

(où $z_p(t)$ désigne une solution particulière de l'équation) permettent de déterminer les constantes d'intégration C et D de façon unique. La première équation conduit à une valeur unique de la constante $C = A - z_p(0)$. La seconde équation permet ensuite de déterminer une valeur unique de D si $\sin\omega t_\star \neq 0$ c'est-à-dire si

$$t_\star \neq \frac{n\pi}{\omega}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Question 4

i. À tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, les relations

$$\begin{cases} x = v^2 - 2u \\ y = v \end{cases} \tag{♠}$$

font correspondre un couple unique $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En inversant ces relations, on obtient

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}(y^2 - x) \\ v = y \end{cases} \tag{♣}$$

qui réalise la correspondance inverse. Les relations établissent donc une correspondance biunivoque entre les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
Les relations (♠) sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^2$ et telles que le Jacobien

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2v \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2$$

Dès lors, les relations définissent un changement de variables régulier d'ordre infini entre $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $\Omega' = \mathbb{R}^2$.

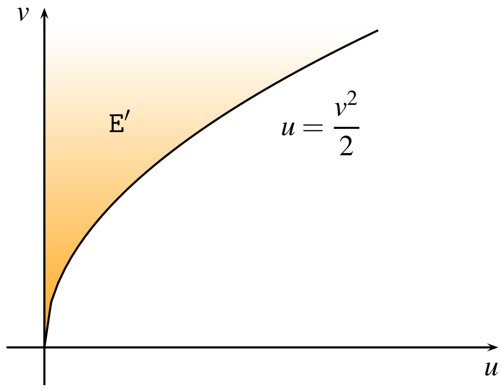
ii. Si $(x,y) \in \mathtt{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y > 0\}$,

$$\begin{cases} x = v^2 - 2u & > 0 \\ y = v & > 0 \end{cases}$$

de sorte que l'image de $\mathtt{E}$ est l'ensemble

$$\mathtt{E}' = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : u < \frac{v^2}{2},\, v > 0 \right\}$$

Graphiquement, on a



iii. À partir des relations (♣), il vient directement

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v} = y\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

Substituant y par son expression en fonction de v, on obtient finalement

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = v\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

Exploitant ces résultats, on calcule

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} = \left(v\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(v\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$= v^2\frac{\partial^2}{\partial u^2} + v\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial^2}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

Appliqué à une fonction appartenant à $C_2(\mathtt{E}')$, cet opérateur s'écrit

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = v^2\frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2v\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

puisque les dérivées croisées sont alors égales.