LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2020

MATH0002 - Analyse Mathématique 1
Examen

- *Durée de l'épreuve : 4 heures.*
- *Cet examen est à livre ouvert. Les calculatrices sont autorisées.*
- *Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.*
- *Indiquez lisiblement votre NOM en majuscules suivi de votre Prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque face et numérotez-la.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche pour cette question avec votre NOM et votre Prénom.*
- *Vos copies doivent impérativement être transmises au format pdf, en quatre fichiers distincts correspondant aux quatre questions de cet examen et dont les noms sont construits sur le modèle NOM_Prenom_Q1.pdf, NOM_Prenom_Q2.pdf, NOM_Prenom_Q3.pdf et NOM_Prenom_Q4.pdf.*

Question 1

i. Si $f(x) = o(\operatorname{sh} x)$ au voisinage de 0, peut-on affirmer que $f^2(x) = o\left(x^2\right)$ pour $(x \to 0)$? Justifiez.

ii. Définissez mathématiquement $\lim\limits_{y \to +\infty} f(y) = -\infty$.

iii. Quelles hypothèses minimales permettent d'écrire

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{g(x+\Delta x)\Delta x} = \frac{f'(x)}{g(x)} \quad ?$$

iv. Les fonctions $\sin x$, $\cos x$ et $x\,\mathrm{e}^{ix}$ sont-elles linéairement indépendantes sur $[0,1]$? Justifiez.

v. Si la matrice hessienne d'une fonction $f \in C_2(\mathbb{R}^2)$ évaluée au point stationnaire $(x_\star, y_\star)$ est égale à

$$\mathsf{H}(x_\star, y_\star) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

peut-on en déduire que f présente un minimum local (non strict) en $(x_\star, y_\star)$? Justifiez.

vi. Soit $\mathbf{f} = f\mathbf{e}_y$ avec $f \in C_1(\mathbb{R}^3)$.

- Exprimez en français l'expression $\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{e}_z)$.
- Évaluez l'expression $\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{e}_z)$.

Question 2

i. Déterminez le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2(x)$ de degré 2 en $(x-2)$ qui approche la fonction

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2+x}}$$

au voisinage de $a = 2$. Précisez pour quelles valeurs de x cette approximation est valable. Justifiez.

ii. Vérifiez que le développement permet d'approcher $f(1)$ par $^{75}/_{128}$.

iii. Déterminez une expression de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ associée à l'approximation de $f(x)$ par $\mathcal{P}_2(x)$.

iv. Déterminez une majoration de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ <u>en fonction de x</u> valable sur $[0,2]$.

v. Comparez la valeur numérique exacte $f(1)$ et son approximation $^{75}/_{128}$. Cette erreur est-elle cohérente avec l'analyse de l'erreur $\mathcal{R}_2$ réalisée en iv. ?

Question 3

On considère le problème différentiel

$$\begin{cases} z''(t) + 2\omega z'(t) + 2\omega^2 z(t) = \omega^2 \Big[\sin(2\omega t) - 1\Big] \\ z(0) = A,\ z(t_\star) = B \end{cases}$$

où $\omega > 0$ désigne un paramètre réel.

i. Déterminez la solution dans le cas où $t_\star = \dfrac{\pi}{2\omega}$, $A = -\dfrac{7}{10}$ et $B = 0$.

ii. Pour quelles valeurs de $t_\star$, A et B la solution du problème différentielle est-elle unique ? Justifiez.

Question 4

On considère les relations

$$\begin{cases} x = u \\ y = u^2 - 2v \end{cases}$$

i. Déterminez les plus grands ouverts Ω et Ω' entre lesquels ces relations permettent de définir un changement de variables régulier. Justifiez.

ii. Déterminez l'image $\mathtt{E}'$ de l'ouvert $\mathtt{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ par le changement de variables. Représentez graphiquement $\mathtt{E}'$.

iii. Déterminez l'expression des opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ en fonction des variables u et v.

SOLUTION TYPE

Question 1

i. Puisqu'il existe des voisinages de 0 dans lesquels $\operatorname{sh} x$ et x^2 diffèrent de 0 (excepté en 0), l'hypothèse $f(x) = o(\operatorname{sh} x)$ au voisinage de 0 et la thèse $f^2(x) = o\left(x^2\right)$ pour $x \to 0$ sont respectivement équivalentes à

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\operatorname{sh} x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f^2(x)}{x^2} = 0$$

La thèse est alors démontrée en calculant

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{f^2(x)}{\operatorname{sh}^2 x} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{x^2} \right) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\operatorname{sh} x} \right)^2 \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} \right)^2 = 0 \cdot 1 = 0$$

où on a utilisé l'hypothèse et le fait que, par application de l'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x}{1} = 1$$

ii. L'expression $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y) = -\infty$ peut être traduite mathématiquement par

$$(\forall M > 0)\,(\exists N > 0)\,(\forall y \in \operatorname{dom} f : y \geq N) : f(y) \leq -M$$

où $\operatorname{dom} f$ désigne le domaine de la fonction f.

iii. La formule proposée repose sur la continuité de la fonction g en x (avec $g(x) \neq 0$) et la dérivabilité de la fonction f en x. Ces conditions permettent effectivement d'écrire

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{g(x+\Delta x)\Delta x} = \left(\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) \left(\lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)} \right) = \frac{f'(x)}{g(x)}$$

iv. Les fonctions $\sin x$, $\cos x$ et $x\mathrm{e}^{ix}$ sont linéairement indépendantes sur $[0,1]$ si leur Wronskien n'est pas identiquement nul sur cet intervalle. Comme

$$W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & x\mathrm{e}^{ix} \\ \cos x & -\sin x & \mathrm{e}^{ix} + ix\mathrm{e}^{ix} \\ -\sin x & -\cos x & 2i\mathrm{e}^{ix} - x\mathrm{e}^{ix} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{ix} \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & x \\ \cos x & -\sin x & 1+ix \\ -\sin x & -\cos x & 2i - x \end{vmatrix}$$

$$= \mathrm{e}^{ix} \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & x \\ \cos x & -\sin x & 1+ix \\ 0 & 0 & 2i \end{vmatrix} = 2i\mathrm{e}^{ix}(-\sin^2 x - \cos^2 x) = -2i\mathrm{e}^{ix}$$

ne s'annule pas sur $[0,1]$, il en résulte que les fonctions $\cos x$, $\sin x$ et $x\mathrm{e}^{ix}$ sont effectivement linéairement indépendantes sur l'intervalle $[0,1]$.

v. La réponse à la question posée est "non", comme le montre l'exemple de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{5}{2}y^2 - x^4$$

Cette fonction est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et stationnaire en $(x_\star, y_\star) = (0,0)$ puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_\star, y_\star) = -4x_\star^3 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_\star, y_\star) = 5y_\star = 0$$

Cette fonction vérifie encore

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 5$$

de sorte que sa matrice Hessienne satisfait à

$$H(x_\star, y_\star) = \begin{pmatrix} -12x_\star^2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La fonction f vérifie donc toutes les hypothèses de l'énoncé.
On constate toutefois que $f(x,0) = -x^4$ présente un maximum en $x = 0$ tandis que $f(0,y) = 5y^2/2$ présente un minimum en $y = 0$, de sorte que f, *en tant que fonction de deux variables*, présente un point de selle et non un minimum local en $(0,0)$.

vi.
- Les symboles "$\wedge$" et "$\nabla\wedge$" renvoient respectivement au produit vectoriel et au rotationnel. L'expression $\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{e}_z)$ désigne donc le rotationnel du produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{f}$ et $\mathbf{e}_z$.
- On calcule aisément $\mathbf{f} \wedge \mathbf{e}_z = f\mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_z = f\mathbf{e}_x$. Dès lors, en procédant formellement pour le calcul du déterminant,

$$\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{e}_z) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_y - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_z$$

Question 2

i. La fonction

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2+x}}$$

étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathtt{I} =]-2, +\infty[$, on peut lui appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $a = 2$ pour tout x appartenant à $\mathtt{I}$.
En effet, la fonction vérifie alors les hypothèses de la formule de Taylor puisqu'elle est réelle, 2 fois continûment dérivable sur $[2,x]$ (ou $[x,2]$) et 3 fois dérivable sur $]2,x[$ (ou $]x,2[$).
Le polynôme cherché s'écrit

$$\mathcal{P}_2(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2$$

On calcule successivement

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2+x}}, \qquad f(2) = 1$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2+x} - \frac{x}{2}\,(2+x)^{-1/2}}{2+x} = \frac{\frac{x}{2}+2}{(2+x)^{3/2}}, \qquad f'(2) = \frac{3}{8}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{2}(2+x)^{3/2} - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}+2\right)(2+x)^{1/2}}{(2+x)^3} = -\frac{2+\frac{x}{4}}{(2+x)^{5/2}}, \qquad f''(2) = -\frac{5}{64}$$

de sorte que le polynôme de Taylor est

$$\mathcal{P}_2(x) = 1 + \frac{3}{8}(x-2) - \frac{5}{128}(x-2)^2$$

Cette approximation est valable pour tout $x \in]-2, +\infty[$.

ii. En exploitant l'approximation établie au point précédent, la valeur approchée de $f(1)$ est donnée par

$$\mathcal{P}_2(1) = 1 - \frac{3}{8} - \frac{5}{128} = \frac{128-48-5}{128} = \frac{75}{128}$$

comme attendu.

iii. L'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ associée à l'approximation de $f(x)$ par $\mathcal{P}_2(x)$ est donnée par

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-2)^3$$

où $\xi \in]2,x[$ (ou $\xi \in]x,2[$). La dérivation de l'expression de f'' obtenue plus haut conduit à

$$f'''(x) = \frac{-\frac{1}{4}(2+x)^{5/2} + \frac{5}{2}\left(2+\frac{x}{4}\right)(2+x)^{3/2}}{(2+x)^5} = \frac{\frac{3x}{8}+\frac{9}{2}}{(2+x)^{7/2}}$$

de sorte que

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{\frac{3\xi}{8}+\frac{9}{2}}{(2+\xi)^{7/2}}\frac{(x-2)^3}{3!} = \frac{\xi+12}{16(2+\xi)^{7/2}}(x-2)^3 \quad \text{avec} \quad \xi \in]2,x[\quad (\text{ou } \xi \in]x,2[)$$

iv. Si $x \in [0,2]$, $\xi \in]x,2[$ et on a

$$|\xi+12| \leq 2+12 = 14 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{(2+\xi)^{7/2}} \leq \frac{1}{(2+x)^{7/2}}$$

de sorte que

$$|\mathcal{R}_2(x)| \leq \frac{7}{8(2+x)^{7/2}}|x-2|^3$$

v. L'erreur absolue commise en approchant $f(1) = 1/\sqrt{3}$ par $\mathcal{P}_2(1) = 75/128$ est donnée par

$$|f(1) - \mathcal{P}_2(1)| = \left|\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{75}{128}\right| \simeq 0.0086$$

La majoration de l'erreur établie en iv. et évaluée en $x = 1$ est donnée par

$$\frac{7}{8(2+1)^{7/2}}|1-2|^3 = \frac{7}{8 \cdot 3^{7/2}} \simeq 0.0187$$

ce qui est bien cohérent.

Question 3

i. L'équation différentielle

$$z''(t) + 2\omega z'(t) + 2\omega^2 z(t) = \omega^2\Big[\sin(2\omega t) - 1\Big]$$

est linéaire et non homogène. Le théorème de structure affirme que la solution générale est la somme de la solution générale $z_h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $z_p(t)$ de l'équation non homogène.

Équation homogène

L'équation étant linéaire à coefficients constants, on considère le polynôme caractéristique

$$L(\tilde{z}) = \tilde{z}^2 + 2\omega\tilde{z} + 2\omega^2$$

dont les zéros (de multiplicité 1) sont $(-1-i)\omega$ et $(-1+i)\omega$.
La solution générale de l'équation homogène s'écrit donc

$$z_h(t) = C_1\,\mathrm{e}^{(-1+i)\omega t} + C_2\,\mathrm{e}^{(-1-i)\omega t} = \mathrm{e}^{-\omega t}\left(C_1\,\mathrm{e}^{i\omega t} + C_2\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. Sous forme réelle, cette solution s'écrit

$$z_h(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}\,(C\cos\omega t + D\sin\omega t)$$

où C et D sont des constantes.

Solution particulière de l'équation non homogène
Le second membre peut s'écrire

$$\omega^2\Big[\sin(2\omega t) - 1\Big] = f_1(t) + f_2(t) \quad \text{avec} \quad f_1(t) = -\omega^2 \quad \text{et} \quad f_2(t) = \omega^2\sin 2\omega t$$

Comme l'équation est linéaire, on peut rechercher une solution particulière de la forme

$$z_p(t) = z_{p1}(t) + z_{p2}(t)$$

où $z_{pi}(t)$ est une solution particulière de

$$z''(t) + 2\omega z'(t) + 2\omega^2 z(t) = f_i(t), \qquad i \in \{1,2\}$$

- Par simple inspection, on constate que $z_{p1}(t) = -1/2$ est une solution de

$$z''(t) + 2\omega z'(t) + 2\omega^2 z(t) = -\omega^2$$

- Puisque $2i\omega$ n'est pas un zéro du polynôme caractéristique, on peut rechercher une solution particulière de

$$z''(t) + 2\omega z'(t) + 2\omega^2 z(t) = \omega^2\sin 2\omega t \qquad (\heartsuit)$$

  de la forme

$$z_{p2}(t) = \beta\cos 2\omega t + \gamma\sin 2\omega t$$

  On calcule successivement

$$z'_{p2}(t) = -2\beta\omega\sin 2\omega t + 2\gamma\omega\cos 2\omega t$$

  et

$$z''_{p2}(t) = -4\beta\omega^2\cos 2\omega t - 4\gamma\omega^2\sin 2\omega t$$

  Substituant ces expressions dans l'équation non homogène ($\heartsuit$), il vient

$$-4\beta\omega^2\cos 2\omega t - 4\gamma\omega^2\sin 2\omega t + 2\omega(-2\beta\omega\sin 2\omega t + 2\gamma\omega\cos 2\omega t) + 2\omega^2(\beta\cos 2\omega t + \gamma\sin 2\omega t) = \omega^2\sin 2\omega t$$

  En identifiant les coefficients des fonctions cosinus et sinus, on obtient

$$\begin{cases} -2\beta + 4\gamma = 0 \\ -2\gamma - 4\beta = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \beta = -\dfrac{1}{5} \\ \gamma = -\dfrac{1}{10} \end{cases}$$

  Une solution particulière de l'équation ($\heartsuit$) est donc

$$z_{p_2}(t) = -\frac{1}{10}\,(2\cos 2\omega t + \sin 2\omega t)$$

Solution générale de l'équation non homogène
La solution générale de l'équation non homogène est

$$z(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}\,(C\cos\omega t + D\sin\omega t) - \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\,(2\cos 2\omega t + \sin 2\omega t)$$

Solution du problème
Les constantes C et D peuvent être déterminées en exploitant les conditions auxiliaires. D'une part, on a

$$z(0) = -\frac{7}{10} = C - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \qquad \Rightarrow \qquad C = 0$$

Ensuite, exploitant ce résultat, il vient

$$z\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = 0 = \mathrm{e}^{-\pi/2}D - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$$

de sorte que

$$D = \frac{3}{10}\,\mathrm{e}^{\pi/2}$$

La solution du problème différentiel est donc

$$z(t) = \frac{3}{10}\,\mathrm{e}^{\pi/2}\,\mathrm{e}^{-\omega t}\sin\omega t - \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\,(2\cos 2\omega t + \sin 2\omega t)$$

ii. La solution du problème différentiel est unique si les conditions auxiliaires

$$\begin{cases} z(0) = A = C + z_p(0) \\ z(t_\star) = B = \mathrm{e}^{-\omega t_\star}(C\cos\omega t_\star + D\sin\omega t_\star) + z_p(t_\star) \end{cases}$$

(où $z_p(t)$ désigne une solution particulière de l'équation) permettent de déterminer les constantes d'intégration C et D de façon unique. La première équation conduit à une valeur unique de la constante $C = A - z_p(0)$. La seconde équation permet ensuite de déterminer une valeur unique de D si $\sin\omega t_\star \neq 0$ c'est-à-dire si

$$t_\star \neq \frac{n\pi}{\omega}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Question 4

i. À tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, les relations

$$\begin{cases} x = u \\ y = u^2 - 2v \end{cases} \tag{$\spadesuit$}$$

font correspondre un couple unique $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En inversant ces relations, on obtient

$$\begin{cases} u = x \\ v = \dfrac{1}{2}(x^2 - y) \end{cases} \tag{$\clubsuit$}$$

qui réalise la correspondance inverse. Les relations établissent donc une correspondance biunivoque entre les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
Les relations ($\spadesuit$) sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^2$ et telles que le Jacobien

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2u & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2$$

Dès lors, les relations définissent un changement de variables régulier d'ordre infini entre $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $\Omega' = \mathbb{R}^2$.

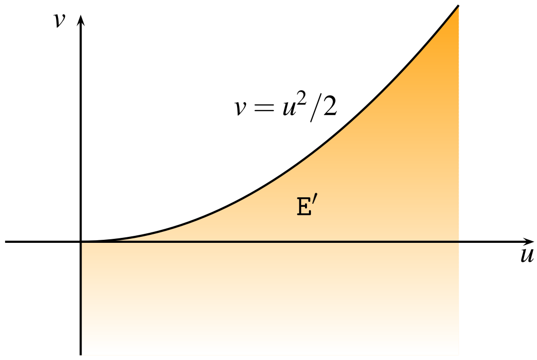
ii. Si $(x,y) \in \mathtt{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y > 0\}$,

$$\begin{cases} x = u & > 0 \\ y = u^2 - 2v & > 0 \end{cases}$$

de sorte que l'image de $\mathtt{E}$ est l'ensemble

$$\mathtt{E}' = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0,\, u^2 > 2v\right\}$$

Graphiquement, on a



iii. À partir des relations (♣), il vient directement

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + x\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}$$

Substituant x par son expression en fonction de u, on obtient finalement

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}$$

Exploitant ces résultats, on calcule

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial v} + u\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + u\frac{\partial^2}{\partial v \partial u} + u^2\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

Appliqué à une fonction appartenant à $C_2(\mathtt{E}')$, cet opérateur s'écrit

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial v} + 2u\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + u^2\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

puisque les dérivées croisées sont alors égales.