Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2020

MATH0002 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1

EXAMEN

- *Durée de l'épreuve : 4 heures.*
- *Cet examen est à livre ouvert. Les calculatrices sont autorisées.*
- *Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.*
- *Indiquez lisiblement votre NOM en majuscules suivi de votre Prénom en minuscules dans le coin supérieur gauche de chaque face et numérotez-la.*
- *Si vous ne répondez pas à une question, rendez une feuille blanche pour cette question avec votre NOM et votre Prénom.*
- *Vos copies doivent impérativement être transmises au format pdf, en quatre fichiers distincts correspondant aux quatre questions de cet examen et dont les noms sont construits sur le modèle NOM_Prenom_Q1.pdf, NOM_Prenom_Q2.pdf, NOM_Prenom_Q3.pdf et NOM_Prenom_Q4.pdf.*

Question 1

i. Si $f(x) = o(x)$ au voisinage de 0, peut-on affirmer que $f^2(x) = o\left(\mathrm{sh}^2 x\right)$ pour $(x \to 0)$? Justifiez.

ii. Définissez mathématiquement $\lim\limits_{y \to -\infty} f(y) = +\infty$.

iii. Quelles hypothèses minimales permettent d'écrire

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) \frac{g(x) + g(x_0)}{2} = f'(x_0) g(x_0) \quad ?$$

iv. Les fonctions x, e^x et e^{-2x} sont-elles linéairement indépendantes sur $[-1/4, 1/4]$? Justifiez.

v. Si la matrice hessienne d'une fonction $f \in C_2(\mathbb{R}^2)$ évaluée au point stationnaire $(x_\star, y_\star)$ est égale à

$$\mathsf{H}(x_\star, y_\star) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

peut-on en déduire que f présente un minimum local (non strict) en $(x_\star, y_\star)$? Justifiez.

vi. Soit $\mathbf{f} = f\mathbf{e}_x$ avec $f \in C_1(\mathbb{R}^3)$.
- Exprimez en français l'expression $\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{e}_y)$.
- Évaluez l'expression $\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{e}_y)$.

Question 2

i. Déterminez le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2(x)$ de degré 2 en $(x-4)$ qui approche la fonction

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x}}$$

au voisinage de $a=4$. Précisez pour quelles valeurs de x cette approximation est valable. Justifiez.

ii. Vérifiez que le développement permet d'approcher $f(3)$ par $^{92}/_{81}$.

iii. Déterminez une expression de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ associée à l'approximation de $f(x)$ par $\mathcal{P}_2(x)$.

iv. Déterminez une majoration de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ <u>en fonction de x</u> valable sur $[2,4]$.

v. Comparez la valeur numérique exacte $f(3)$ et son approximation $^{92}/_{81}$. Cette erreur est-elle cohérente avec l'analyse de l'erreur $\mathcal{R}_2$ réalisée en iv. ?

Question 3

On considère le problème différentiel

$$\begin{cases} z''(t) + 2\omega z'(t) + 5\omega^2 z(t) = \omega^2 \Big[\sin(\omega t) - 1\Big] \\ z(0) = A,\ z(t_\star) = B \end{cases}$$

où $\omega > 0$ désigne un paramètre réel.

i. Déterminez la solution dans le cas où $t_\star = \dfrac{\pi}{4\omega}$, $A = -\dfrac{3}{10}$ et $B = 0$.

ii. Pour quelles valeurs de $t_\star$, A et B la solution du problème différentielle est-elle unique ? Justifiez.

Question 4

On considère les relations

$$\begin{cases} x = v + 2u^2 \\ y = u \end{cases}$$

i. Déterminez les plus grands ouverts Ω et Ω' entre lesquels ces relations permettent de définir un changement de variables régulier. Justifiez.

ii. Déterminez l'image $\mathtt{E}'$ de l'ouvert $\mathtt{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ par le changement de variables. Représentez graphiquement $\mathtt{E}'$.

iii. Déterminez l'expression des opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ en fonction des variables u et v.

SOLUTION TYPE

Question 1

i. Puisqu'il existe des voisinages de 0 dans lesquels x et $\operatorname{sh} x$ diffèrent de 0 (excepté en 0), l'hypothèse $f(x) = o(x)$ au voisinage de 0 et la thèse $f^2(x) = o\left(\operatorname{sh}^2 x\right)$ pour $x \to 0$ sont respectivement équivalentes à

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f^2(x)}{\operatorname{sh}^2 x} = 0$$

La thèse est alors démontrée en calculant

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^2(x)}{\operatorname{sh}^2 x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{f^2(x)}{x^2} \frac{x^2}{\operatorname{sh}^2 x} \right) = \left(\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \right)^2 \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sh} x} \right)^2 = 0 \cdot 1 = 0$$

où on a utilisé l'hypothèse et le fait que, par application de l'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sh} x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{ch} x} = 1$$

ii. L'expression $\lim\limits_{y\to -\infty} f(y) = +\infty$ peut être traduite mathématiquement par

$$(\forall M > 0)\, (\exists N > 0)\, (\forall y \in \operatorname{dom} f : y \leq -N) : f(y) \geq M$$

où $\operatorname{dom} f$ désigne le domaine de la fonction f.

iii. La formule proposée repose sur la continuité des fonctions f' et g en x_0 (la continuité de f' en x_0 étant elle-même assurée par la continue dérivabilité de f en x_0). Ces deux conditions permettent effectivement d'écrire

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) \frac{g(x) + g(x_0)}{2} = f'(x_0) \frac{g(x_0) + g(x_0)}{2} = f'(x_0) g(x_0)$$

iv. Les fonctions x, e^x et e^{-2x} sont linéairement indépendantes sur $[-1/4, 1/4]$ si leur Wronskien n'est pas identiquement nul sur cet intervalle. Comme

$$W = \begin{vmatrix} x & \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-2x} \\ 1 & \mathrm{e}^x & -2\,\mathrm{e}^{-2x} \\ 0 & \mathrm{e}^x & 4\,\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^x\ \mathrm{e}^{-2x} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \mathrm{e}^{-x}\,[4x + 1 - (-2x + 4)] = 3\,\mathrm{e}^{-x}(2x - 1)$$

ne s'annule qu'en $x = 1/2$, il en résulte que les fonctions x, e^x et e^{-2x} sont effectivement linéairement indépendantes sur l'intervalle $[-1/4, 1/4]$.

v. La réponse à la question posée est "non", comme le montre l'exemple de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \frac{3}{2} x^2 - y^4$$

Cette fonction est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et stationnaire en $(x_\star, y_\star) = (0, 0)$ puisque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_\star, y_\star) = 3x_\star = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_\star, y_\star) = -4y_\star^3 = 0$$

Cette fonction vérifie encore

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2$$

de sorte que sa matrice Hessienne satisfait à

$$H(x_\star, y_\star) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -12y_\star^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La fonction f vérifie donc toutes les hypothèses de l'énoncé.
On constate toutefois que $f(x,0) = 3x^2/2$ présente un minimum en $x = 0$ tandis que $f(0,y) = -y^4$ présente un maximum en $y = 0$, de sorte que f, *en tant que fonction de deux variables*, présente un point de selle et non un minimum local en $(0,0)$.

vi.
- Les symboles "$\wedge$" et "$\nabla\wedge$" renvoient respectivement au produit vectoriel et au rotationnel. L'expression $\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{e}_y)$ désigne donc le rotationnel du produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{f}$ et $\mathbf{e}_y$.
- On calcule aisément $\mathbf{f} \wedge \mathbf{e}_y = f\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y = f\mathbf{e}_z$. Dès lors, en procédant formellement pour le calcul du déterminant,

$$\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{e}_y) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_x - \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_y$$

Question 2

i. La fonction

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x}}$$

étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathtt{I} =]-1/2, +\infty[$, on peut lui appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $a = 4$ pour tout x appartenant à $\mathtt{I}$.
En effet, la fonction vérifie alors les hypothèses de la formule de Taylor puisqu'elle est réelle, 2 fois continûment dérivable sur $[4,x]$ (ou $[x,4]$) et 3 fois dérivable sur $]4,x[$ (ou $]x,4[$).
Le polynôme cherché s'écrit

$$\mathcal{P}_2(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2$$

On calcule successivement

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x}}, \qquad f(4) = \frac{4}{3}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+2x} - x\,(1+2x)^{-1/2}}{1+2x} = \frac{1+x}{(1+2x)^{3/2}}, \qquad f'(4) = \frac{5}{27}$$

$$f''(x) = \frac{(1+2x)^{3/2} - 3(1+x)(1+2x)^{1/2}}{(1+2x)^3} = -\frac{x+2}{(1+2x)^{5/2}}, \qquad f''(4) = -\frac{2}{81}$$

de sorte que le polynôme de Taylor est

$$\mathcal{P}_2(x) = \frac{4}{3} + \frac{5}{27}(x-4) - \frac{1}{81}(x-4)^2$$

Cette approximation est valable pour tout $x \in]-1/2, +\infty[$.

ii. En exploitant l'approximation établie au point précédent, la valeur approchée de $f(3)$ est donnée par

$$\mathcal{P}_2(3) = \frac{4}{3} - \frac{5}{27} - \frac{1}{81} = \frac{108-15-1}{81} = \frac{92}{81}$$

comme attendu.

iii. L'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ associée à l'approximation de $f(x)$ par $\mathcal{P}_2(x)$ est donnée par

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-4)^3$$

où $\xi \in]4,x[$ (ou $\xi \in]x,4[$). La dérivation de l'expression de f'' obtenue plus haut conduit à

$$f'''(x) = \frac{-(1+2x)^{5/2} + 5(x+2)(1+2x)^{3/2}}{(1+2x)^5} = \frac{3(x+3)}{(1+2x)^{7/2}}$$

de sorte que

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{\xi+3}{2(1+2\xi)^{7/2}}(x-4)^3 \quad \text{avec} \quad \xi \in]4,x[\quad (\text{ou } \xi \in]x,4[)$$

iv. Si $x \in [2,4]$, $\xi \in]x,4[$ et on a

$$|\xi+3| \leq 4+3 = 7 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{(1+2\xi)^{7/2}} \leq \frac{1}{(1+2x)^{7/2}}$$

de sorte que

$$|\mathcal{R}_2(x)| \leq \frac{7}{2(1+2x)^{7/2}}|x-4|^3$$

v. L'erreur absolue commise en approchant $f(3) = 3/\sqrt{7}$ par $\mathcal{P}_2(3) = 92/81$ est donnée par

$$|f(3) - \mathcal{P}_2(3)| = \left|\frac{3}{\sqrt{7}} - \frac{92}{81}\right| \simeq 0.0019$$

La majoration de l'erreur établie en iv. et évaluée en $x = 3$ est donnée par

$$\frac{7}{2(1+2\cdot 3)^{7/2}}|3-4|^3 = \frac{1}{2\cdot 7^{5/2}} \simeq 0.0039$$

ce qui est bien cohérent.

Question 3

i. L'équation différentielle

$$z''(t) + 2\omega z'(t) + 5\omega^2 z(t) = \omega^2\Big[\sin(\omega t) - 1\Big]$$

est linéaire et non homogène. Le théorème de structure affirme que la solution générale est la somme de la solution générale $z_h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $z_p(t)$ de l'équation non homogène.

Équation homogène

L'équation étant linéaire à coefficients constants, on considère le polynôme caractéristique

$$L(\tilde{z}) = \tilde{z}^2 + 2\omega\tilde{z} + 5\omega^2$$

dont les zéros (de multiplicité 1) sont $(-1-2i)\omega$ et $(-1+2i)\omega$.

La solution générale de l'équation homogène s'écrit donc

$$z_h(t) = C_1\,\mathrm{e}^{(-1+2i)\omega t} + C_2\,\mathrm{e}^{(-1-2i)\omega t} = \mathrm{e}^{-\omega t}\left(C_1\,\mathrm{e}^{2i\omega t} + C_2\,\mathrm{e}^{-2i\omega t}\right)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. Sous forme réelle, cette solution s'écrit

$$z_h(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}\,(C\cos 2\omega t + D\sin 2\omega t)$$

où C et D sont des constantes.

Solution particulière de l'équation non homogène
Le second membre peut s'écrire

$$\omega^2\Big[\sin(\omega t) - 1\Big] = f_1(t) + f_2(t) \quad \text{avec} \quad f_1(t) = -\omega^2 \quad \text{et} \quad f_2(t) = \omega^2\sin\omega t$$

Comme l'équation est linéaire, on peut rechercher une solution particulière de la forme

$$z_p(t) = z_{p1}(t) + z_{p2}(t)$$

où $z_{pi}(t)$ est une solution particulière de

$$z''(t) + 2\omega z'(t) + 5\omega^2 z(t) = f_i(t), \qquad i \in \{1,2\}$$

- Par simple inspection, on constate que $z_{p1}(t) = -1/5$ est une solution de

$$z''(t) + 2\omega z'(t) + 5\omega^2 z(t) = -\omega^2$$

- Puisque $i\omega$ n'est pas un zéro du polynôme caractéristique, on peut rechercher une solution particulière de

$$z''(t) + 2\omega z'(t) + 5\omega^2 z(t) = \omega^2\sin\omega t \tag{$\heartsuit$}$$

  de la forme

$$z_{p2}(t) = \beta\cos\omega t + \gamma\sin\omega t$$

  On calcule successivement

$$z'_{p2}(t) = -\beta\omega\sin\omega t + \gamma\omega\cos\omega t$$

  et

$$z''_{p2}(t) = -\beta\omega^2\cos\omega t - \gamma\omega^2\sin\omega t$$

  Substituant ces expressions dans l'équation non homogène ($\heartsuit$), il vient

$$\begin{aligned}-\beta\omega^2\cos\omega t - \gamma\omega^2\sin\omega t + 2\omega(-\beta\omega\sin\omega t + \gamma\omega\cos\omega t)\\ + 5\omega^2(\beta\cos\omega t + \gamma\sin\omega t) = \omega^2\sin\omega t\end{aligned}$$

  En identifiant les coefficients des fonctions cosinus et sinus, on obtient

$$\begin{cases} 4\beta + 2\gamma = 0 \\ 4\gamma - 2\beta = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \beta = -\dfrac{1}{10} \\ \gamma = \dfrac{2}{10} \end{cases}$$

  Une solution particulière de l'équation ($\heartsuit$) est donc

$$z_{p_2}(t) = \frac{1}{10}\,(-\cos\omega t + 2\sin\omega t)$$

Solution générale de l'équation non homogène
La solution générale de l'équation non homogène est

$$z(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}\left(C\cos 2\omega t + D\sin 2\omega t\right) - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}\left(-\cos\omega t + 2\sin\omega t\right)$$

Solution du problème
Les constantes C et D peuvent être déterminées en exploitant les conditions auxiliaires. D'une part, on a

$$z(0) = -\frac{3}{10} = C - \frac{1}{5} - \frac{1}{10} \qquad \Rightarrow \qquad C = 0$$

Ensuite, exploitant ce résultat, il vient

$$z\left(\frac{\pi}{4\omega}\right) = 0 = \mathrm{e}^{-\pi/4} D - \frac{1}{5} - \frac{\sqrt{2}}{20} + \frac{\sqrt{2}}{10}$$

de sorte que

$$D = \frac{\mathrm{e}^{\pi/4}}{20}(4-\sqrt{2})$$

La solution du problème différentiel est donc

$$z(t) = \frac{\mathrm{e}^{\pi/4}}{20}(4-\sqrt{2})\,\mathrm{e}^{-\omega t}\sin 2\omega t - \frac{1}{5} + \frac{1}{10}\left(-\cos\omega t + 2\sin\omega t\right)$$

ii. La solution du problème différentiel est unique si les conditions auxiliaires

$$\begin{cases} z(0) = A = C + z_p(0) \\ z(t_\star) = B = \mathrm{e}^{-\omega t_\star}(C\cos 2\omega t_\star + D\sin 2\omega t_\star) + z_p(t_\star) \end{cases}$$

(où $z_p(t)$ désigne une solution particulière de l'équation) permettent de déterminer les constantes d'intégration C et D de façon unique. La première équation conduit à une valeur unique de la constante $C = A - z_p(0)$. La seconde équation permet ensuite de déterminer une valeur unique de D si $\sin 2\omega t_\star \neq 0$ c'est-à-dire si

$$t_\star \neq \frac{n\pi}{2\omega}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Question 4

i. À tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, les relations

$$\begin{cases} x = v + 2u^2 \\ y = u \end{cases} \tag{$\spadesuit$}$$

font correspondre un couple unique $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En inversant ces relations, on obtient

$$\begin{cases} u = y \\ v = x - 2y^2 \end{cases} \tag{$\clubsuit$}$$

qui réalise la correspondance inverse. Les relations établissent donc une correspondance biunivoque entre les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
Les relations ($\spadesuit$) sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^2$ et telles que le Jacobien

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4u & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2$$

Dès lors, les relations définissent un changement de variables régulier d'ordre infini entre $\Omega = \mathbb{R}^2$ et $\Omega' = \mathbb{R}^2$.

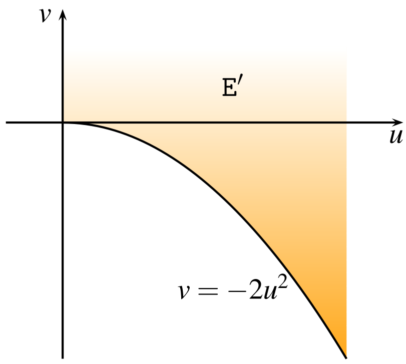
ii. Si $(x,y) \in \mathtt{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\, y > 0\}$,

$$\begin{cases} x = v + 2u^2 & > 0 \\ y = u & > 0 \end{cases}$$

de sorte que l'image de $\mathtt{E}$ est l'ensemble

$$\mathtt{E}' = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0,\, v > -2u^2\right\}$$

Graphiquement, on a



iii. À partir des relations (♣), il vient directement

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} - 4y\frac{\partial}{\partial v}$$

Substituant y par son expression en fonction de u, on obtient finalement

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial u} - 4u\frac{\partial}{\partial v}$$

Exploitant ces résultats, on calcule

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial u} - 4u\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial}{\partial u} - 4u\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 4\frac{\partial}{\partial v} - 4u\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - 4u\frac{\partial^2}{\partial v \partial u} + 16u^2\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

Appliqué à une fonction appartenant à $C_2(\mathtt{E}')$, cet opérateur s'écrit

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 4\frac{\partial}{\partial v} - 8u\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + 16u^2\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

puisque les dérivées croisées sont alors égales.