Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2024

MATH0002-4 - Analyse Mathématique 1
Examen

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Si $f_1(x) = g(x) + o(x^3)$ et $f_2(x) = 1 + x + o(x^2)$ au voisinage de 0, peut-on en déduire que

$$f_1(x)\, f_2(x) = (1+x)g(x) + o(x^3), \quad (x \to 0) \quad ?$$

Justifiez.

ii. Montrez que les fonctions

$$\int_0^x f_1(t)dt, \qquad \int_0^x f_2(t)dt, \qquad \int_0^x f_3(t)dt$$

sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$ si les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont continues et linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

iii. Listez les conditions sous lesquelles les relations

$$\begin{cases} x = f(u,v,w) \\ y = g(u,v,w) \\ z = h(u,v,w) \end{cases}$$

définissent un changement de variables régulier d'ordre 1 entre deux ouverts Ω et Ω' de $\mathbb{R}^3$. Explicitez les notations utilisées.

iv. Énoncez en français la relation

$$\nabla \wedge (\varphi \mathbf{f}) = (\nabla\varphi \wedge \mathbf{f}) + \varphi \nabla \wedge \mathbf{f}$$

et démontrez celle-ci dans le cas particulier où $\mathbf{f}(x,y,z) = f(x,z)\mathbf{e}_x$ et $\varphi(x,y,z)$ est une fonction scalaire. Sous quelles hypothèses minimales sur f et φ cette relation est-elle valable ?

Tournez la page.

Question II

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

i. Sur quel intervalle la formule de Taylor permettant d'approcher f au voisinage de $a = 1$ par un polynôme $\mathcal{P}_2$ de degré 2 en $(x-1)$ est-elle applicable ? Justifiez.
ii. Déterminez le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2$ d'ordre 2 approchant la fonction f au voisinage de $a = 1$.
iii. Déterminez une majoration de l'erreur commise en approchant $f(1.1)$ par $\mathcal{P}_2(1.1)$. Exprimez cette majoration sous la forme d'une fraction.
iv. Montrez que la fonction f possède une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle comprenant l'origine.
v. Déterminez le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2^\star$ d'ordre 2 approchant la fonction f^{-1} au voisinage de l'origine.

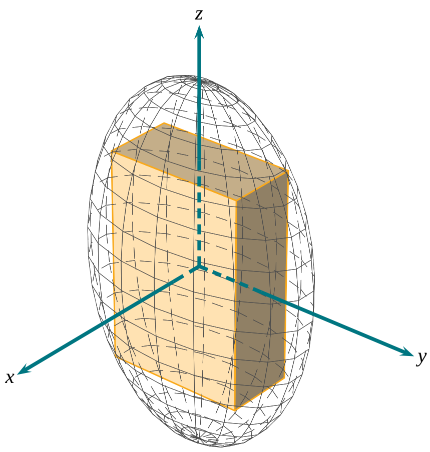
Question III

Résoudre le problème différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} + \omega(x-y) = 2\omega E \sin(\omega t) \\ \dot{y} + 2\omega y = \omega E\, \mathrm{e}^{-\omega t} \\ x(0) = -E, \quad y(0) = E \end{cases}$$

où E et ω sont des constantes strictement positives et où on a noté $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ et $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$.

Question IV



Pour célébrer leur victoire en coupe du monde de rugby, les commerçants sud-africains proposent d'emballer les cadeaux de fin d'année dans des paquets ayant la forme d'un ballon de rugby, assimilé à un ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

On cherche les dimensions a, b et c optimales des demi-axes d'un tel ellipsoïde si celui-ci doit contenir une boîte parallélépipédique de dimensions ℓ, 2ℓ et 3ℓ et présenter le volume intérieur V minimum où

$$V(a,b,c) = \frac{4}{3}\pi abc$$

Les axes de symétrie du parallélépipède coïncident avec ceux de l'ellipsoïde. La boîte parallélépipédique est disposée de façon à présenter les dimensions ℓ, 2ℓ et 3ℓ respectivement selon les axes OX, OY et OZ.

i. Déterminez la(les) relation(s) mathématique(s) entre a, b, c et ℓ exprimant le fait que les huit sommets du parallélépipède sont situés sur l'ellipsoïde.
ii. Déterminez les dimensions optimales a, b et c de l'emballage en fonction de ℓ si les huit sommets du parallélépipède sont situés sur l'ellipsoïde. Pour déterminer ces dimensions optimales, vous pouvez vous appuyer sur l'hypothèse, conforme à l'intuition, de l'existence du minimum.

SOLUTION TYPE

Question I

i. Si $f_1 = g(x) + o(x^3)$ et $f_2(x) = 1 + x + o(x^2)$ au voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned} f_1(x)\,f_2(x) &= (1+x)g(x) + g(x)o(x^2) + (1+x)o(x^3) + o(x^5) \\ &= (1+x)g(x) + g(x)o(x^2) + o(x^3), \qquad (x \to 0) \end{aligned}$$

Ceci ne conduira à

$$f_1(x)\,f_2(x) = (1+x)g(x) + o(x^3) \qquad (x \to 0)$$

que si $g(x) = O(x)$. La proposition est donc fausse.
Par exemple, si $g(x) = 1$, $f_1(x) = 1 + x^4$ et $f_2(x) = 1 + x + x^3$, on a bien

$$\begin{cases} f_1(x) = 1 + x^4 = 1 + o(x^3) \\ f_2(x) = 1 + x + x^3 = 1 + x + o(x^2) \end{cases}$$

mais

$$f_1(x)\,f_2(x) = (1+x)\cdot 1 + x^3 + x^4 + x^5 + x^7$$

où

$$x^3 + x^4 + x^5 + x^7 \neq o(x^3), \qquad (x \to 0)$$

ii. Les primitives considérées sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$ si

$$\lambda_1 \int_0^x f_1(t)dt + \lambda_2 \int_0^x f_2(t)dt + \lambda_3 \int_0^x f_3(t)dt = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad (\spadesuit)$$

Par dérivation de la relation entre les primitives, on obtient, puisque les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont continues sur $\mathbb{R}$,

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Cette relation implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ puisque les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$. L'implication $(\spadesuit)$ est donc vérifiée, de sorte que les primitives sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

iii. Les relations

$$\begin{cases} x = f(u,v,w) \\ y = g(u,v,w) \\ z = h(u,v,w) \end{cases} \qquad (\heartsuit)$$

définissent un changement de variables régulier d'ordre 1 entre deux ouverts Ω et Ω' de $\mathbb{R}^3$ si

- les relations $(\heartsuit)$ établissent une correspondance bi-univoque entre les éléments (x,y,z) de Ω et (u,v,w) de Ω' ;
- les fonctions f, g et h sont continûment dérivables sur Ω' et leur Jacobien est non nul, *i.e.*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial w} \\ \dfrac{\partial h}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{sur } \Omega'$$

iv. La relation

$$\nabla \wedge (\varphi \mathbf{f}) = (\nabla\varphi \wedge \mathbf{f}) + \varphi \nabla \wedge \mathbf{f}$$

peut être énoncée en français en disant que *“Le rotationnel du produit du champ scalaire* φ *et du champ vectoriel* $\mathbf{f}$ *est égal à la somme du produit vectoriel du gradient de* φ *et de* $\mathbf{f}$ *et du produit de* φ *par le rotationnel de* $\mathbf{f}$*.”*.

Dans le cas où $\mathbf{f} = f(x,z)\mathbf{e}_x$, le membre de gauche peut être obtenu en développant formellement le déterminant

$$\nabla \wedge (\varphi \mathbf{f}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \varphi f(x,z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial z}(\varphi f)\mathbf{e}_y - \frac{\partial}{\partial y}(\varphi f)\mathbf{e}_z = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} f + \varphi \frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathbf{e}_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} f \mathbf{e}_z$$

Le premier terme du membre de droite est donné par

$$\nabla\varphi \wedge \mathbf{f} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z\right) \wedge f\mathbf{e}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} f\mathbf{e}_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z} f\mathbf{e}_y$$

puisque $\mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_x = \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_y \wedge \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$. Le second terme du membre de droite est donné par

$$\varphi \nabla \wedge \mathbf{f} = \varphi \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f(x,z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \varphi \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_y$$

En rassemblant les résultats précédents, on trouve que les deux membres de la relation proposée s’écrivent sous la forme

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} f + \varphi \frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathbf{e}_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} f\mathbf{e}_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} f\mathbf{e}_z + \frac{\partial \varphi}{\partial z} f\mathbf{e}_y + \varphi \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_y$$

ce qui établit cette relation dans le cas particulier envisagé.

Les seules règles appliquées pour démontrer la relation proposée sont celles de la dérivation d’un produit. Il suffit donc d’introduire l’hypothèse de dérivabilité des fonctions f et φ.

Question II

i. L’application de la formule de Taylor à l’ordre 2 au voisinage de $a = 1$ demande que la fonction soit réelle, deux fois continûment dérivable sur $[1,x]$ (ou $[x,1]$ si $x < 1$) et trois fois dérivable sur $]1,x[$ (ou $]x,1[$ si $x < 1$).

La fonction $f(x) = (\ln x)/x$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $]0,+\infty[$, on peut affirmer que la formule de Taylor à l’ordre 2 au voisinage de $a = 1$ peut être appliquée $\forall x \in]0,+\infty[$.

ii. Le polynôme de Taylor à l’ordre 2 au voisinage de $a = 1$ est donné par

$$\mathcal{P}_2(x) = f(1) + f'(1)\,(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2}$$

On a successivement

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}, \qquad\qquad f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}, \qquad\qquad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{-3+2\ln x}{x^3}, \qquad f''(1) = -3$$

De telle sorte que le polynôme cherché s'écrit

$$\mathcal{P}_2(x) = (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2$$

iii. La formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $a = 1$ permet d'écrire, $\forall x \in]0,+\infty[$,

$$f(x) = \mathcal{P}_2(x) + \mathcal{R}_2(x)$$

où

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{(x-1)^3}{3!} f'''(\xi) \qquad \text{avec } \xi \in]1,x[\text{ ou }]x,1[$$

Dans le cas particulier où $x = 1.1$, on a

$$f(1.1) = \mathcal{P}_2(1.1) + \mathcal{R}_2(1.1)$$

où

$$\mathcal{R}_2(1.1) = \frac{10^{-3}}{3!} f'''(\xi) \qquad \text{avec } \xi \in]1,1.1[$$

Comme

$$f'''(x) = \frac{2x^2 - 3x^2(-3+2\ln x)}{x^6} = \frac{11-6\ln x}{x^4}$$

l'erreur commise en approchant $f(1.1)$ par $\mathcal{P}_2(1.1)$ est donnée par

$$|\mathcal{R}_2(1.1)| = \frac{1}{6000} \frac{|11-6\ln\xi|}{\xi^4} \qquad \text{avec } \xi \in]1,1.1[$$

La majoration de l'erreur est obtenue en considérant une borne supérieure du numérateur et une borne inférieure du dénominateur. Pour $\xi \in]1,1.1[$ on peut affirmer que

$$|11-6\ln\xi| < 11 \quad \text{et} \quad \xi^4 > 1$$

Donc,

$$|\mathcal{R}_2(1.1)| < \frac{11}{6000}$$

iv. Le théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques permet de justifier l'existence de $f^{-1} \in C_\infty(]-\infty,1/\mathrm{e}[)$, où l'intervalle $]-\infty,1/\mathrm{e}[$ contient l'origine, puisque

- f est réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $]0,\mathrm{e}[$;
- $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} > 0 \quad \forall x \in]0,\mathrm{e}[$;
- $f(]0,\mathrm{e}[) =]-\infty,1/\mathrm{e}[$.

v. Puisque f^{-1} est réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $]-\infty, 1/\mathrm{e}[$ on peut lui appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $0 \in]-\infty, 1/\mathrm{e}[$ et l'approcher par son polynôme de Taylor

$$\mathcal{P}_2^\star(x) = f^{-1}(0) + x\left(f^{-1}\right)'(0) + \frac{x^2}{2}\left(f^{-1}\right)''(0)$$

Comme $f(1) = 0$, on sait que $f^{-1}(0) = 1$.
D'autre part, le théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques permet d'écrire que, pour tout $y \in]-\infty, 1/\mathrm{e}[$,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]} \qquad \Rightarrow \qquad (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'[f^{-1}(0)]} = \frac{1}{f'[1]} = 1$$

La dérivée seconde est donnée par

$$\begin{aligned}
(f^{-1})''(y) &= \frac{d}{dy}\frac{1}{f'[f^{-1}(y)]} \\
&= \frac{-1}{(f'[f^{-1}(y)])^2}\frac{d}{dy}f'[f^{-1}(y)] \\
&= \frac{-1}{(f'[f^{-1}(y)])^2}\ f''[f^{-1}(y)]\frac{d}{dy}f^{-1}(y) \\
&= \frac{-1}{(f'[f^{-1}(y)])^3}\ f''[f^{-1}(y)]
\end{aligned}$$

En évaluant cette expression à l'origine, on obtient

$$(f^{-1})''(0) = \frac{-1}{(f'[f^{-1}(0)])^3}\ f''[f^{-1}(0)] = \frac{-1}{(f'[1])^3}\ f''[1] = \frac{-1}{1}(-3) = 3$$

Dès lors, le polynôme de Taylor recherché s'écrit

$$\mathcal{P}_2^\star(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2$$

Question III

Nous considérons le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} + \omega(x-y) = 2\omega E\sin(\omega t) \\ \dot{y} + 2\omega y = \omega E\,\mathrm{e}^{-\omega t} \end{cases}$$

La seconde équation est une équation linéaire et non homogène pour la seule inconnue $y(t)$. Sa solution est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation non homogène, soit

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Solution générale de l'équation homogène associée

Comme l'équation est linéaire à coefficients constants, on peut trouver la solution générale en considérant les zéros du polynôme caractéristique

$$L(z) = z + 2\omega$$

dont le seul zéro est -2ω.

Ainsi, la solution générale de l'équation homogène s'écrit

$$y_h(t) = A\,\mathrm{e}^{-2\omega t}$$

où A est une constante.

Solution particulière de l'équation non homogène

On remarque que le second membre de l'équation est de la forme exponentielle-polynôme $\mathcal{P}_p(t)e^{\lambda t}$ où $\mathcal{P}_p(t) = \omega E$ est un polynôme de degré 0 et $\lambda = -\omega$ n'est pas un zéro de $L(z)$. On peut donc rechercher une solution particulière du type

$$y_p(t) = C\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

Injectant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient

$$-\omega C\,\mathrm{e}^{-\omega t} + 2\omega C\,\mathrm{e}^{-\omega t} = \omega E\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

de sorte que $C = E$. Dès lors, on a

$$y_p(t) = E\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

Solution générale de l'équation non homogène

La solution générale de l'équation non homogène s'écrit alors

$$y(t) = A\,\mathrm{e}^{-2\omega t} + E\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

La condition initiale s'écrit

$$y(0) = E = A + E \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

Dès lors, on obtient

$$y(t) = E\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

Si on substitue cette solution dans l'équation

$$\dot{x} + \omega(x - y) = 2\omega E \sin(\omega t)$$

celle-ci devient

$$\dot{x} + \omega x = 2\omega E \sin(\omega t) + \omega E\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire et non homogène dont la seule inconnue est $x(t)$. Sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation non homogène, soit

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Solution générale de l'équation homogène associée

Comme l'équation est linéaire à coefficients constants, on peut trouver la solution générale en considérant les zéros du polynôme caractéristique

$$L(z) = z + \omega$$

dont le seul zéro est $-\omega$.

Ainsi, la solution générale de l'équation homogène s'écrit

$$x_h(t) = B\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

où B est une constante.

Solution particulière de l'équation non homogène

Comme l'équation est linéaire, le principe de superposition s'applique et on peut rechercher une solution particulière de l'équation non homogène de la forme

$$x_p(t) = x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t)$$

où $x_{p_1}(t)$ et $x_{p_2}(t)$ sont respectivement des solutions particulières associées aux seconds membres

$$f_1(t) = 2\omega E \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad f_2(t) = \omega E\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

- Afin d'identifier une solution particulière, $x_{p_1}(t)$, de l'équation

  $$\dot{x} + \omega x = 2\omega E \sin(\omega t)$$

  on remarque que les coefficients de l'équation sont réels et que le second membre est la partie imaginaire de $2\omega E\,\mathrm{e}^{i\omega t}$. Dès lors, on écrit

  $$x_{p_1}(t) = \Im(\tilde{x}_{p_1}(t))$$

  où $\tilde{x}_{p_1}(t)$ est une solution particulière de l'équation

  $$\dot{x} + \omega x = 2\omega E\,\mathrm{e}^{i\omega t} \qquad (\diamondsuit)$$

  Le second membre de cette équation est de la forme exponentielle-polynôme $\mathcal{P}_p(t)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ où $\mathcal{P}_p(t) = 2\omega E$ est un polynôme de degré 0 et $\lambda = i\omega$ n'est pas un zéro de $L(z)$. On peut donc rechercher une solution particulière du type

  $$\tilde{x}_{p_1}(t) = C\,\mathrm{e}^{i\omega t}$$

  En injectant cette expression dans l'équation différentielle ($\diamondsuit$), il vient

  $$i\omega C\,\mathrm{e}^{i\omega t} + \omega C\,\mathrm{e}^{i\omega t} = 2\omega E\,\mathrm{e}^{i\omega t}$$

  dont on déduit que

  $$C = \frac{2E}{i+1} = E(1-i)$$

  Dès lors, on obtient

  $$\tilde{x}_{p_1}(t) = E(1-i)\,\mathrm{e}^{i\omega t} = E(1-i)\big[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\big]$$

  Pour obtenir $x_{p_1}(t)$, il suffit de prendre la partie imaginaire de $\tilde{x}_{p_1}(t)$. On a alors

  $$x_{p_1}(t) = E\sin(\omega t) - E\cos(\omega t)$$

- Afin d'identifier une solution particulière, $x_{p_2}(t)$, de l'équation

  $$\dot{x} + \omega x = \omega E\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

  on remarque que le second membre est de la forme exponentielle-polynôme $\mathcal{P}_p(t)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ où $\mathcal{P}_p(t) = \omega E$ est un polynôme de degré 0 et $\lambda = -\omega$ un zéro simple de $L(z)$. On peut donc rechercher une solution particulière du type

  $$x_{p_2}(t) = Ct\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

On calcule

$$\dot{x}_{p_2}(t) = -\omega Ct\,\mathrm{e}^{-\omega t} + C\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

En substituant $x_{p_2}(t)$ et $\dot{x}_{p_2}(t)$ dans l'équation non homogène, on obtient dès lors

$$-\omega Ct\,\mathrm{e}^{-\omega t} + C\,\mathrm{e}^{-\omega t} + \omega Ct\,\mathrm{e}^{-\omega t} = \omega E\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

ce qui conduit à $C = \omega E$. Dès lors, on obtient

$$x_{p_2}(t) = \omega Et\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

Solution générale de l'équation non homogène

La solution générale de l'équation non homogène s'écrit alors

$$x(t) = x_h(t) + x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t) = B\,\mathrm{e}^{-\omega t} + E\sin(\omega t) - E\cos(\omega t) + \omega Et\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

La condition initiale $x(0) = -E$ conduit à identifier $B = 0$. Finalement, on obtient

$$x(t) = E\sin(\omega t) - E\cos(\omega t) + \omega Et\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

Solution générale du problème différentiel

En conclusion, la solution du problème différentiel est

$$\begin{cases} x(t) = E\sin(\omega t) - E\cos(\omega t) + \omega Et\,\mathrm{e}^{-\omega t} \\ y(t) = E\,\mathrm{e}^{-\omega t} \end{cases}$$

Question IV

i. Les sommets du parallélépipède sont situés aux points de coordonnées $(\pm\ell/2, \pm 2\ell/2, \pm 3\ell/2)$. Pour traduire mathématiquement l'appartenance de ces points à l'ellipsoïde, il suffit d'exprimer que leurs coordonnées vérifient l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

de celui-ci. On a donc

$$\frac{(\pm\ell/2)^2}{a^2} + \frac{(\pm\ell)^2}{b^2} + \frac{(\pm 3\ell/2)^2}{c^2} = 1$$

soit

$$\frac{\ell^2}{4a^2} + \frac{\ell^2}{b^2} + \frac{9\ell^2}{4c^2} = 1$$

ii. Les dimensions optimales de l'emballage sont obtenues en recherchant le minimum de la fonction cible

$$V(a,b,c) = \frac{4}{3}\pi abc$$

sous la contrainte

$$g(a,b,c) \equiv \frac{\ell^2}{4a^2} + \frac{\ell^2}{b^2} + \frac{9\ell^2}{4c^2} - 1 = 0 \qquad (\diamondsuit)$$

et les contraintes (implicites) de positivité des dimensions a, b et c.

Les fonctions V et g sont continûment dérivables (donc différentiables) sur $\Omega = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$. On sait par ailleurs que $\nabla g \neq 0$ sur Ω puisque

$$\left(\frac{\partial g}{\partial a}, \frac{\partial g}{\partial b}, \frac{\partial g}{\partial c}\right) = \left(-\frac{2\ell^2}{4a^3}, -\frac{2\ell^2}{b^3}, -\frac{18\ell^2}{4c^3}\right)$$

Dès lors, le minimum recherché se trouve parmi les points stationnaires du Lagrangien.
Le Lagrangien est donné par

$$L(a,b,c,\lambda) = \frac{4}{3}\pi abc - \lambda\left(\frac{\ell^2}{4a^2} + \frac{\ell^2}{b^2} + \frac{9\ell^2}{4c^2} - 1\right)$$

Les conditions de stationnarités s'expriment sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial a} = \dfrac{4}{3}\pi bc + \lambda\dfrac{2\ell^2}{4a^3} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial b} = \dfrac{4}{3}\pi ac + \lambda\dfrac{2\ell^2}{b^3} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial c} = \dfrac{4}{3}\pi ab + \lambda\dfrac{18\ell^2}{4c^3} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \dfrac{\ell^2}{4a^2} - \dfrac{\ell^2}{b^2} - \dfrac{9\ell^2}{4c^2} = 0 \end{cases}$$

En multipliant respectivement par a, b et c chacune des trois premières équations, on obtient

$$-\frac{4}{3}\pi abc = \lambda\frac{2\ell^2}{4a^2} = \lambda\frac{2\ell^2}{b^2} = \lambda\frac{18\ell^2}{4c^2}$$

Puisque $\lambda = 0$ ne peut conduire à aucune solution admissible (On aurait alors $a = 0$ ou $b = 0$ ou $c = 0$.), on en déduit que

$$\frac{1}{a^2} = \frac{4}{b^2} = \frac{9}{c^2}$$

soit, puisque a, b et c sont positifs,

$$b = 2a, \qquad c = 3a$$

En injectant cette relation dans la quatrième équation du système ci-dessus, il vient

$$1 - \frac{\ell^2}{4a^2} - \frac{\ell^2}{4a^2} - \frac{9\ell^2}{36a^2} = 0$$

soit

$$1 - \frac{3\ell^2}{4a^2} = 0 \quad \text{et} \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$$

On en déduit

$$b = \sqrt{3}\ell, \quad c = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ell$$

Ces paramètres correspondent au volume

$$V = 3\sqrt{3}\pi\ell^3$$

S'appuyant sur l'existence du minimum formulée dans l'énoncé et trouvant un seul point stationnaire au lagrangien, on conclut que ce point stationnaire constitue le minimum recherché.