

*Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.*

Question I

- i. On dit que f est négligeable par rapport à g au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, ce qu'on écrit $f = o(g)$, ($x \rightarrow x_0$), lorsque

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists V(x_0))(\forall x \in V(x_0)) : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

Sur cette base, peut-on affirmer que, si $f_1 = o(|x - x_0|)$ et $f_2 = o(|x - x_0|)$ au voisinage de x_0 , alors $f_1 f_2 = o(|x - x_0|^2)$, ($x \rightarrow x_0$) ? Justifiez.

- ii. Justifiez l'existence de la fonction arch (en précisant son domaine de définition) et déterminez l'expression de sa dérivée par application du théorème d'existence et de dérivation des fonctions réciproques.
- iii. On considère les relations

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$$

définissant un changement de variables régulier d'ordre 2 entre des ouverts Ω et Ω' de \mathbb{R}^2 et le changement de variables inverse.

Montrez que les matrices Jacobiennes des deux changements de variables sont les inverses l'une de l'autre.

- iv. Énoncez en français la relation $\nabla \cdot (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{g})$ et démontrez celle-ci dans le cas particulier où

$$\mathbf{f}(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{e}_x \quad \text{et} \quad \mathbf{g}(x, y, z) = g_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + g_y(x, y, z)\mathbf{e}_y$$

Sous quelles hypothèses cette relation est-elle valable ?

Question II

Pour résoudre de façon approchée l'équation

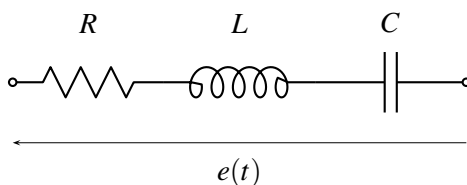
$$\arcsin x = \frac{4}{9} \quad (\heartsuit)$$

on décide de remplacer la fonction arcsin par son polynôme de Taylor de degré 2 au voisinage de $1/2$.

- Sur quel intervalle la formule de Taylor permettant d'approcher $f(x) = \arcsin x$ au voisinage de $a = 1/2$ par un polynôme $\mathcal{P}_2(x)$ de degré 2 en $(x - a)$ est-elle applicable? Justifiez.
- Déterminez le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2(x)$ et l'expression de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ correspondante.
- Déterminez une constante C majorant l'erreur $|\mathcal{R}_2(x)|$ sur l'intervalle $[2/5, 1/2]$.
- En remplaçant $\arcsin x$ par $\mathcal{P}_2(x)$ dans l'équation (\heartsuit) à résoudre, on trouve la solution approchée $\tilde{x} = 0.429808$. Précisez s'il s'agit d'une approximation par excès ou par défaut. Justifiez.

Question III

On considère un circuit électrique constitué d'une résistance, d'une self et d'un condensateur placés en série et soumis à une tension alternative $e(t) = 25E(1 - \cos \omega t)$ (où E et ω sont des constantes strictement positives).



L'évolution temporelle de la charge du condensateur $q(t)$ est alors décrite par l'équation différentielle

$$4q''(t) + 4\omega q'(t) + \omega^2 q(t) = e(t)$$

- Déterminez $q(t)$ si, initialement, le condensateur est déchargé et le circuit n'est parcouru par aucun courant électrique, ce qui se traduit par $q(0) = 0$ et $q'(0) = 0$.
- Montrez que, asymptotiquement pour $t \rightarrow +\infty$, le courant électrique $i(t) = q'(t)$ traversant le circuit tend à varier périodiquement. Exprimez l'amplitude de ces variations périodiques de $i(t)$.

Question IV

On considère la fonction

$$f(x, y, z) = z + z^2$$

et l'ensemble

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = c, x^2 + y^2 = 1\}$$

où c désigne une constante.

- Décrivez qualitativement et esquissez E dans le cas où $c = 0$.
- Déterminez la position et la valeur du minimum et du maximum absolus de f sur E dans le cas où $c = 0$.
- On note $M(c)$ la valeur du maximum absolu de f sur E . Que vaut $M'(0)$?

SOLUTION TYPE

Question I

- i. Si $f_1 = o(|x - x_0|)$ et $f_2 = o(|x - x_0|)$ au voisinage de x_0 , on peut écrire, en vertu de la définition de la notation “est négligeable par rapport à”,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists V_1(x_0))(\forall x \in V_1(x_0)) : |f_1(x)| \leq \sqrt{\varepsilon}|x - x_0|$$

et

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists V_2(x_0))(\forall x \in V_2(x_0)) : |f_2(x)| \leq \sqrt{\varepsilon}|x - x_0|$$

Dès lors, on a

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists V_3(x_0) = V_1(x_0) \cap V_2(x_0))(\forall x \in V_3(x_0)) : \\ |f_1(x)f_2(x)| = |f_1(x)||f_2(x)| \leq \varepsilon|x - x_0|^2$$

ce qui traduit la relation

$$f_1 f_2 = o(|x - x_0|^2), \quad (x \rightarrow x_0)$$

- ii. La fonction ch vérifie les hypothèses du théorème d'existence et de dérivabilité des fonctions réciproques sous la forme

- $\operatorname{ch} \in C_1(]0, +\infty[)$;
- $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x > 0$ sur $]0, +\infty[$;
- $\operatorname{ch}(]0, +\infty[) =]1, +\infty[$.

Ceci assure l'existence et la continue dérivabilité de la fonction arch sur l'intervalle $]1, +\infty[$. On calcule dès lors

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arch} x = \frac{1}{\left[\frac{d}{dy} \operatorname{ch} y \right]_{y=\operatorname{arch} x}} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{arch} x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

puisque $\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$ et que $\operatorname{sh} x > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Puisque l'équation $\operatorname{ch} y = 1$ possède l'unique solution $y = 0$, on peut étendre la définition de la fonction arch à l'intervalle $[1, +\infty[$ avec $\operatorname{arch} 1 = 0$. La fonction arch n'est cependant pas dérivable en 1.

- iii. Soient J et J_{inv} les matrices Jacobiennes du changement de variables et du changement de variables inverse. On a

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_{inv} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
 J J_{inv} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} [x(\xi(x,y), \eta(x,y))] & \frac{\partial}{\partial y} [x(\xi(x,y), \eta(x,y))] \\ \frac{\partial}{\partial x} [y(\xi(x,y), \eta(x,y))] & \frac{\partial}{\partial y} [y(\xi(x,y), \eta(x,y))] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}
 \end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème de dérivation des fonctions composées dont les hypothèses sont vérifiées puisque, grâce à la régularité des changements de variables, on sait que toutes les fonctions impliquées sont continûment dérivables sur les ouverts considérés.

Puisque les matrices Jacobiennes sont inversibles (leur déterminant différent de zéro), ceci démontre que les matrices Jacobiennes des deux changements de variables sont les inverses l'une de l'autre.

iv. La relation

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{g})$$

se lit : “La divergence du produit vectoriel des champs vectoriels \mathbf{f} et \mathbf{g} est égale à la différence du produit scalaire de \mathbf{g} par le rotationnel de \mathbf{f} et du produit scalaire de \mathbf{f} par le rotationnel de \mathbf{g} .”

Si $\mathbf{f}(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{g}(x, y, z) = g_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + g_y(x, y, z)\mathbf{e}_y$, on a d'une part

$$\mathbf{f} \wedge \mathbf{g} = f_x \mathbf{e}_x \wedge (g_x \mathbf{e}_x + g_y \mathbf{e}_y) = f_x g_y \mathbf{e}_z$$

et

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \frac{\partial}{\partial z} (f_x g_y)$$

D'autre part, en utilisant l'expression générale du rotationnel d'une fonction vectorielle \mathbf{h} , on a

$$\nabla \wedge \mathbf{h} = \left(\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

de sorte que

$$\nabla \wedge \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial z} \mathbf{e}_y - \frac{\partial f_x}{\partial y} \mathbf{e}_z$$

et

$$\nabla \wedge \mathbf{g} = -\frac{\partial g_y}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial g_x}{\partial z} \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

On calcule ensuite

$$\mathbf{g} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = (g_x \mathbf{e}_x + g_y \mathbf{e}_y) \cdot \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} \mathbf{e}_y - \frac{\partial f_x}{\partial y} \mathbf{e}_z \right) = g_y \frac{\partial f_x}{\partial z}$$

et

$$\mathbf{f} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{g}) = f_x \mathbf{e}_x \cdot \left[-\frac{\partial g_y}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial g_x}{\partial z} \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z \right] = -f_x \frac{\partial g_y}{\partial z}$$

La relation donnée s'écrit donc

$$\frac{\partial}{\partial z} (f_x g_y) = g_y \frac{\partial f_x}{\partial z} + f_x \frac{\partial g_y}{\partial z}$$

et est bien vérifiée.

Pour pouvoir effectuer les différentes opérations, il suffit que \mathbf{f} et \mathbf{g} soient dérivables sur \mathbb{R}^3 .

Question II

- i. La fonction arcsin étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $] -1, 1[$, on peut appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 en $a = 1/2 \in] -1, 1[$ pour tout x appartenant à l'intervalle $] -1, 1[$. La fonction arcsin vérifie en effet alors les hypothèses de Taylor puisqu'elle est réelle, 2 fois continûment dérivable sur $]1/2, x[$ (resp. sur $]x, 1/2[$) et 3 fois dérivable sur $]1/2, x[$ (resp. sur $]x, 1/2[$).
- ii. La formule de Taylor à l'ordre 2 s'écrit

$$f(x) = \mathcal{P}_2(x) + \mathcal{R}_2(x)$$

avec

$$\mathcal{P}_2(x) = f(1/2) + (x - 1/2)f'(1/2) + \frac{(x - 1/2)^2}{2} f''(1/2)$$

et

$$\mathcal{R}_2 = \frac{(x - 1/2)^3}{6} f'''(\xi) \quad \text{où } \xi \in]1/2, x[\quad (\text{ou }]x, 1/2[\text{ si } x < 1/2)$$

D'une part, il vient successivement

$$\begin{aligned} f(x) &= \arcsin x & f(1/2) &= \frac{\pi}{6} \\ f'(x) &= \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} & f'(1/2) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \\ f''(x) &= \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} & f''(1/2) &= \frac{4}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathcal{P}_2(x) = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}(x - 1/2) + \frac{2}{3\sqrt{3}}(x - 1/2)^2$$

D'autre part, on calcule également

$$f'''(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{x(-2x)}{(1-x^2)^{5/2}} = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{5/2}}$$

de sorte que le reste peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{1}{6} (x - 1/2)^3 \frac{1 + 2\xi^2}{(1 - \xi^2)^{5/2}} \quad \text{avec } \xi \in]1/2, x[\quad (\text{ou } \xi \in]x, 1/2[)$$

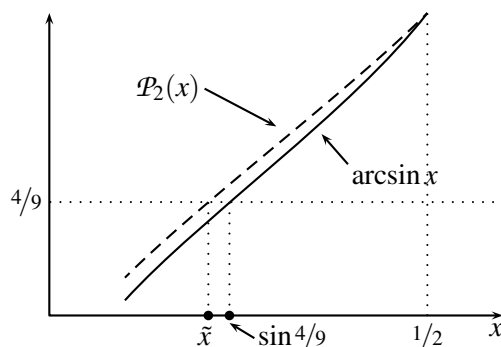
iii. Sur l'intervalle $[2/5, 1/2]$, on a

$$|\mathcal{R}_2(x)| = \left| \frac{1}{6} (x - 1/2)^3 \frac{1 + 2\xi^2}{(1 - \xi^2)^{5/2}} \right| = \frac{1}{6} (1/2 - x)^3 \frac{1 + 2\xi^2}{(1 - \xi^2)^{5/2}}$$

Il est possible de majorer cette expression en donnant à chacun des facteurs du numérateur sa plus grande valeur et au dénominateur sa plus petite valeur, soit, puisque $\xi \in]x, 1/2[\subset]2/5, 1/2[$,

$$|\mathcal{R}_2(x)| \leq \frac{1}{6} (1/2 - 2/5)^3 \frac{1 + 2(1/2)^2}{(1 - (1/2)^2)^{5/2}} = \frac{8}{9\sqrt{3}} 10^{-3}$$

iv. Le reste $\mathcal{R}_2(x)$ étant négatif sur $[2/5, 1/2]$, le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2(x)$ surestime $\arcsin x$ sur cet intervalle. Les fonctions \arcsin et \mathcal{P}_2 étant strictement croissantes sur $[2/5, 1/2]$ (\mathcal{P}_2 décrit une parabole dont le minimum est en $x = -1$.), on a schématiquement



Dès lors, \tilde{x} constitue une approximation par défaut de la solution exacte $\sin(4/9)$.

Question III

i. L'équation

$$4q''(t) + 4\omega q'(t) + \omega^2 q(t) = e(t)$$

est une équation différentielle linéaire non homogène qui peut être écrite sous la forme canonique

$$q''(t) + \omega q'(t) + \frac{\omega^2}{4} q(t) = \frac{e(t)}{4}$$

Sa solution générale $q(t)$ est donc la somme de la solution générale $q_h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $q_p(t)$ de l'équation non homogène.

Commençons par rechercher la solution générale de l'équation homogène

$$q''(t) + \omega q'(t) + \frac{\omega^2}{4} q(t) = 0$$

L'équation étant linéaire à coefficients constants, nous considérons le polynôme caractéristique associé $\mathcal{L}(z) = z^2 + \omega z + \omega^2/4$ qui possède le zéro double $z = -\omega/2$. La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors

$$q_h(t) = (C_1 t + C_2) e^{-\omega t/2}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes.

Comme l'équation est linéaire, le principe de superposition s'applique et on peut rechercher une solution particulière de la forme

$$q_p(t) = q_{p1}(t) + q_{p2}(t)$$

où $q_{p1}(t)$ et $q_{p2}(t)$ sont respectivement des solutions particulières associées aux seconds membres

$$f_1(t) = \frac{25E}{4} \quad \text{et} \quad f_2(t) = -\frac{25}{4}E \cos \omega t$$

Une solution particulière relative à $f_1(t)$ s'identifie par simple inspection de l'équation, soit

$$q_{p1}(t) = \frac{25E}{\omega^2}$$

Vu la forme de

$$f_2(t) = -\frac{25}{4}E \cos \omega t = \Re\left(-\frac{25}{4}E e^{i\omega t}\right)$$

et vu que $i\omega$ n'est pas un zéro du polynôme caractéristique $\mathcal{L}(z)$, nous allons chercher une solution particulière du type

$$q_{p2}(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

Tenant compte de

$$q'_{p2}(t) = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t \quad \text{et} \quad q''_{p2}(t) = -A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t$$

et injectant ces expressions dans l'équation différentielle à résoudre, on doit avoir

$$\begin{aligned} -A\omega^2 \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t + \omega(A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t) \\ + \frac{\omega^2}{4}(A \sin \omega t + B \cos \omega t) = -\frac{25}{4}E \cos \omega t \end{aligned}$$

En égalant les coefficients de $\sin \omega t$ et de $\cos \omega t$ de part et d'autre de l'égalité, on est amené à considérer le système

$$\begin{cases} -3A - 4B = 0 \\ 4A - 3B = -\frac{25E}{\omega^2} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} A = -\frac{4E}{\omega^2} \\ B = \frac{3E}{\omega^2} \end{cases}$$

On obtient dès lors

$$q_{p2}(t) = -\frac{4E}{\omega^2} \sin \omega t + \frac{3E}{\omega^2} \cos \omega t$$

Une solution particulière de l'équation non homogène est donc

$$q_p(t) = \frac{25E}{\omega^2} - \frac{4E}{\omega^2} \sin \omega t + \frac{3E}{\omega^2} \cos \omega t$$

Rassemblant les résultats précédents, on peut écrire la solution générale de l'équation différentielle sous la forme

$$q(t) = q_h(t) + q_p(t) = (C_1 t + C_2) e^{-\omega t/2} + \frac{25E}{\omega^2} - \frac{4E}{\omega^2} \sin \omega t + \frac{3E}{\omega^2} \cos \omega t$$

Il reste à déterminer les constantes C_1 et C_2 grâce aux conditions initiales données.

Comme

$$q'(t) = C_1 e^{-\omega t/2} - \frac{\omega}{2}(C_1 t + C_2) e^{-\omega t/2} - \frac{4E}{\omega} \cos \omega t - \frac{3E}{\omega} \sin \omega t$$

on doit avoir

$$\begin{cases} q(0) = 0 = C_2 + \frac{25E}{\omega^2} + \frac{3E}{\omega^2} \\ q'(0) = 0 = C_1 - \frac{\omega}{2}C_2 - \frac{4E}{\omega} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} C_1 = -\frac{10E}{\omega} \\ C_2 = -\frac{28E}{\omega^2} \end{cases}$$

La solution du problème différentiel est donc

$$\begin{aligned} q(t) &= \left(-\frac{28E}{\omega^2} - \frac{10E}{\omega} t \right) e^{-\omega t/2} + \frac{25E}{\omega^2} - \frac{4E}{\omega^2} \sin \omega t + \frac{3E}{\omega^2} \cos \omega t \\ &= \frac{E}{\omega^2} \left[(-28 - 10\omega t) e^{-\omega t/2} + 25 - 4 \sin \omega t + 3 \cos \omega t \right] \end{aligned}$$

ii. La solution obtenue est telle que

$$i(t) = q'(t) \sim -\frac{4E}{\omega} \cos \omega t - \frac{3E}{\omega} \sin \omega t, \quad (t \rightarrow +\infty)$$

En effet,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\omega t/2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-\omega t/2} = 0$$

de sorte que les premiers termes de $q'(t)$ sont négligeables par rapport aux deux derniers.

Cette fonction peut être décrite par une fonction harmonique unique en introduisant les paramètres $I > 0$ et φ tels que

$$-\frac{4E}{\omega} \cos \omega t - \frac{3E}{\omega} \sin \omega t = I \sin(\omega t - \varphi) = I \sin \omega t \cos \varphi - I \cos \omega t \sin \varphi$$

En identifiant les coefficients correspondants, il vient

$$\begin{cases} I \cos \varphi = -\frac{3E}{\omega} \\ I \sin \varphi = \frac{4E}{\omega} \end{cases} \quad \text{soit} \quad I = \sqrt{I^2 \cos^2 \varphi + I^2 \sin^2 \varphi} = \frac{5E}{\omega}$$

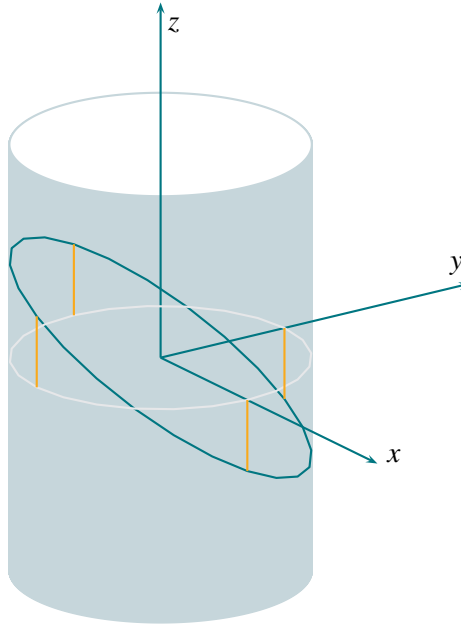
L'amplitude des variations périodiques du courant traversant le circuit est donc $\frac{5E}{\omega}$.

Question IV

i. Dans le cas où $c = 0$, le domaine

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$$

se trouve à l'intersection du plan $x + y + 2z = 0$ et du cylindre circulaire droit $x^2 + y^2 = 1$. Il s'agit d'une courbe fermée.



ii. Il s'agit d'un problème d'optimisation avec 2 contraintes d'égalités

$$g_1(x, y, z) = x + y + 2z = 0 \quad \text{et} \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

La fonction cible $f(x, y, z) = z + z^2$ étant continue sur le compact E (courbe fermée de \mathbb{R}^3), elle y réalise ses bornes supérieure et inférieure. Le minimum et le maximum recherchés existent donc bien.

Les fonctions f , g_1 et g_2 sont indéfiniment continûment dérivables sur \mathbb{R}^3 et donc différentiables. De plus, on peut construire la matrice

$$G = (\nabla g_1(x) \quad \nabla g_2(x)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial x} \\ \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ \frac{\partial g_1}{\partial z} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 1 & 2y \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de G est maximum sauf si sa deuxième colonne est un multiple de la première, c'est-à-dire s'il existe α tel que

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = y = 0, \quad \alpha = 0$$

Comme la solution $x = y = 0$ ne correspond à aucun point de E , on peut conclure que la matrice G est de rang maximum sur E , ce qui garantit que les gradients des contraintes y sont linéairement indépendants.

On en déduit que le minimum et le maximum à identifier se trouvent parmi les points stationnaires du Lagrangien

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = z + z^2 - \lambda_1(x + y + 2z) - \lambda_2(x^2 + y^2 - 1)$$

Ces points stationnaires sont les solutions de

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -\lambda_1 - 2\lambda_2 x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -\lambda_1 - 2\lambda_2 y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 1 + 2z - 2\lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(x + y + 2z) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

En égalant les deux expressions de λ_1 fournies par les deux premières équations, on obtient l'équation

$$2\lambda_2 x = 2\lambda_2 y$$

qui est vérifiée si $x = y$ ou si $\lambda_2 = 0$.

- Si $x = y$, les deux dernières équations deviennent

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x^2 = 1 \end{cases}$$

Ceci conduit à $x = \pm\sqrt{2}/2$ et à l'identification des deux points de \mathbb{R}^3

$$x_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{et} \quad x_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

correspondant à des points stationnaires du Lagrangien.

- Si $\lambda_2 = 0$, on obtient successivement $\lambda_1 = 0$ puis $z = -1/2$ et les deux dernières équations s'écrivent

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

La première équation donne $y = 1 - x$. Éliminant y de la deuxième équation, on obtient $x(x - 1) = 0$. On déduit que $x = 0$ ou $x = 1$ et on identifie les points

$$x_3 = \left(0, 1, -\frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad x_4 = \left(1, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

On calcule

$$f(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}, \quad f(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}, \quad f(x_3) = f(x_4) = -\frac{1}{4}$$

On en conclut que le minimum absolu est réalisé en x_3 et x_4 où la fonction f prend la valeur $-1/4$ et que le maximum absolu est réalisé en x_2 et vaut $\sqrt{2}/2 + 1/2$.

- iii. Dans un problème d'optimisation avec contrainte d'égalité, le multiplicateur relatif à une contrainte mesure la sensibilité de la fonction cible à la valeur de la contrainte. Dès lors, pour obtenir la sensibilité de la valeur maximale de la fonction cible obtenue ci-dessus à la valeur de c , il suffit de poursuivre la résolution entamée au point précédent en déterminant le multiplicateur de Lagrange λ_1 correspondant à la solution maximale obtenue pour $c = 0$. Puisque

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + z \quad \text{et} \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

on a

$$M'(0) = \lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$$