LIÈGE université

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2023

MATH0002 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Si $f_2 \sim f_1$ et $f_2 - f_1 = o(g)$ au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, peut-on affirmer que $f_2 = o(g)$ au voisinage de x_0 ? Justifiez.

ii. On considère le problème d'optimisation

$$\mathcal{P} \left| \begin{array}{l} \min\ f(x,y) \\ \text{s. c.} \quad x+2y=1 \end{array} \right.$$

(a) Déterminez les conditions nécessaires d'optimalité construites à partir du Lagrangien du problème. Précisez les hypothèses.

(b) Montrez que les conditions établies au point (a) sont équivalentes à la condition nécessaire d'optimalité de la fonction d'une variable formée en exploitant la contrainte pour substituer une des variables dans l'expression de la fonction cible.

iii. Exprimez en français et démontrez l'égalité $\nabla \wedge (\nabla \varphi) = \mathbf{0}$ où φ est un champ scalaire défini sur $\mathbb{R}^3$. Précisez l'hypothèse sur la fonction φ assurant la validité de la formule.

Question II

Une nacelle suspendue à un câble horizontal se déplaçant avec une accélération constante $a > 0$ présente à l'équilibre un angle

$$\theta_{eq} = \operatorname{arctg}(-a/g)$$

avec la verticale inférieure (où $g > 0$ est l'accélération de la pesanteur). Introduisant la variable η telle que $\theta = \theta_{eq} + \eta$, on peut décrire l'évolution des pertubations η de cette position d'équilibre par l'équation différentielle

$$(J_C + mh^2)\frac{d^2\eta}{dt^2} = f(\eta) \quad \text{où} \quad f(\eta) = -mah\cos(\theta_{eq}+\eta) - mgh\sin(\theta_{eq}+\eta) \qquad (\heartsuit)$$

où J_C, h, m sont des constantes strictement positives caractéristiques de la nacelle.

i. Par application de la formule de Taylor au voisinage de $\eta = 0$, établissez une approximation linéaire en η de $f(\eta)$ et montrez que cette approximation peut s'écrire sous la forme $-\alpha^2\eta$ où α désigne une constante non nulle. Justifiez.

ii. Déterminez, en fonction de η, une borne de l'erreur associée à la linéarisation introduite en i.

iii. En considérant la forme linéarisée de l'équation ($\heartsuit$), montrez que, quelles que soient les conditions initiales, la perturbation η reste bornée au cours du temps. Ceci traduit la stabilité de la position d'équilibre de la nacelle.

Question III

On considère le problème différentiel associé à la distribution du champ magnétique $h(z)$ induit dans un fluide conducteur en mouvement dans une conduite

$$\begin{cases} \dfrac{d^3h}{dz^3} - m^2\dfrac{dh}{dz} = \lambda \\ \dfrac{dh}{dz}(-1) = \dfrac{dh}{dz}(1) = \mu, \quad h(0) = 0 \end{cases}$$

où m, λ et μ sont des constantes strictement positives.

Déterminez la solution de ce problème sur l'intervalle $[-1,1]$ correspondant à la conduite et exprimez cette solution au moyen de fonctions hyperboliques.

Question IV

On considère l'advection/diffusion d'un constituant dissout dans un écoulement unidimensionnel. Ce problème est décrit par l'équation

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = \kappa\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \qquad (\diamondsuit)$$

où $C(x,t)$ désigne la concentration du constituant, t est le temps, x est la coordonnée longitudinale, u est la vitesse de l'écoulement et κ le coefficient de diffusion. On suppose que u et κ sont des constantes avec $\kappa > 0$.

i. Étudiez la régularité sur $\mathbb{R}^2$ du changement de variables

$$\begin{cases} \xi = x - ut \\ \tau = t \end{cases}$$

ii. Déterminez l'image des opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ par le changement de variables.

iii. Transformez l'équation différentielle ($\diamondsuit$) au moyen du changement de variables.

iv. Déterminez la concentration $C(x,t)$ résultant d'un rejet unitaire à l'instant initial en $x = 0$ dans le cas général où la vitesse de l'écoulement u est non nulle sachant que cette concentration est donnée par

$$C(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right)$$

dans le cas où $u = 0$.

Question I

i. Non, on ne peut pas l'affirmer comme le montre le contre-exemple constitué des fonctions $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sin x$ et $g(x) = x^2$ au voisinage de $x_0 = 0$.
On sait que $\sin x \sim x,\ (x \to 0)$ et on vérifie aisément que $\sin x - x = o(x^2),\ (x \to 0)$ puisque

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0$$

de sorte que les hypothèses de la proposition sont vérifiées. Par contre, on a $\sin x \neq o(x^2),\ (x \to 0)$ puisque $\sin x \sim x,\ (x \to 0)$.

ii. (a) Sous les hypothèses que la fonction cible f et la contrainte g, telle que $g(x,y) = x + 2y - 1 = 0$, sont différentiables et que $\nabla g \neq \mathbf{0}$, les points solutions du problème posé se trouvent parmi les points stationnaires du Lagrangien

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = f(x,y) - \lambda\,(x + 2y - 1)$$

Supposant f différentiable, vu que g est différentiable et que

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y \neq \mathbf{0},$$

les conditions nécessaires d'optimalité correspondant à ce problème sont donc obtenues en annulant ∇L, c'est-à-dire

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - 2\lambda = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x - 2y + 1 = 0 \tag{3}$$

(b) En utilisant la contrainte pour éliminer la variable x, on peut exprimer la fonction cible au moyen de la seule variable y,

$$f(x,y) = f(1-2y,y)$$

La condition nécessaire d'optimalité de cette fonction d'une variable s'écrit

$$\frac{df}{dy} = 0$$

soit, en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées,

$$\frac{df}{dy} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dy} = -2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Cette condition est équivalente à $\nabla L = \mathbf{0}$, puisque, d'une part, elle découle de la contrainte (3) et que, d'autre part, (1) et (2) donnent

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial f}{\partial x}$$

iii. La relation $\nabla \wedge (\nabla\varphi) = \mathbf{0}$ se lit "Le rotationnel du gradient du champ scalaire φ est (le vecteur) nul.". Par définition du rotationnel, on sait que

$$\nabla \wedge \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

Appliquant cette définition au champ vectoriel

$$\mathbf{f} = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

il vient

$$\nabla\wedge(\nabla\varphi) = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right)\mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

L'égalité des dérivées partielles d'ordre 2 qui ne diffèrent que par l'ordre dans lequel les dérivées sont évaluées est assurée en introduisant l'hypothèse $\varphi \in C_2(\mathbb{R}^3)$.

Question II

i. La formule de Taylor peut être utilisée pour linéariser au voisinage de 0 la fonction

$$f(\eta) = -mah\cos(\theta_{eq}+\eta) - mgh\sin(\theta_{eq}+\eta)$$

La fonction f étant réelle et indéfiniment continument dérivable sur $\mathbb{R}$, on a

$$f(\eta) = f(0) + f'(0)\eta + O(\eta^2), \quad (\eta\to 0)$$

où

$$\begin{aligned} f(0) &= -mah\cos\theta_{eq} - mgh\sin\theta_{eq} = -mh\cos\theta_{eq}(a+g\,\mathrm{tg}\,\theta_{eq}) \\ &= -mh\cos\theta_{eq}\big(a+g\,[-a/g]\big) = 0 \end{aligned}$$

$$f'(\eta) = mah\sin(\theta_{eq}+\eta) - mgh\cos(\theta_{eq}+\eta)$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= mah\sin\theta_{eq} - mgh\cos\theta_{eq} = -mh\cos\theta_{eq}(-a\,\mathrm{tg}\,\theta_{eq}+g) \\ &= -mh\cos\theta_{eq}(-a\,[-a/g]+g) = -\frac{mh}{g}\cos\theta_{eq}(a^2+g^2) \end{aligned}$$

On a donc

$$f(\eta) \sim -\frac{mh}{g}\cos\theta_{eq}(a^2+g^2)\eta, \quad (\eta\to 0)$$

Le second membre est bien de la forme $-\alpha^2\eta$ annoncée avec

$$\alpha^2 = \frac{mh}{g}\cos\theta_{eq}(a^2+g^2) > 0$$

puisque $\theta_{eq} = \mathrm{arctg}\,(-a/g) \in]-\pi/2, 0[$ et que, dès lors, $\cos\theta_{eq} > 0$.

ii. L'erreur $\mathcal{R}_1$ associée à l'application de la formule de Taylor à l'ordre 1

$$f(\eta) = f(0) + f'(0)\eta + \mathcal{R}_1(\eta)$$

peut s'exprimer sous la forme

$$\mathcal{R}_1(\eta) = \frac{\eta^2}{2} f''(\xi), \quad \xi \in]0, \eta[\text{ (ou }]\eta, 0[)$$

Puisque

$$f''(\eta) = mah\cos(\theta_{eq} + \eta) + mgh\sin(\theta_{eq} + \eta)$$

on a

$$\mathcal{R}_1(\eta) = \frac{\eta^2}{2} \left[mah\cos(\theta_{eq} + \xi) + mgh\sin(\theta_{eq} + \xi)\right], \quad \xi \in]0, \eta[\text{ (ou }]\eta, 0[)$$

Comme $|\cos(\theta_{eq} + \xi)| \leq 1$ et $|\sin(\theta_{eq} + \xi)| \leq 1$, on obtient aisément la majoration

$$|\mathcal{R}_1(\eta)| \leq \frac{\eta^2}{2} mh(a+g)$$

qui constitue une borne de l'erreur associée à la linéarisation introduite en i.

iii. L'équation différentielle linéarisée s'écrit

$$(J_C + mh^2)\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\alpha^2\eta$$

ou encore, sous forme canonique,

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \omega^2\eta = 0$$

où on a posé

$$\omega = \frac{\alpha}{\sqrt{J_C + mh^2}} > 0$$

Le polynôme caractéristique associé à cette équation différentielle linéaire à coefficients constants et homogène est

$$\mathcal{L}(z) = z^2 + \omega^2$$

Les zéros (simples) sont $\pm i\omega$ de sorte que la solution générale de l'équation différentielle linéarisée s'écrit

$$\eta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

où A et B sont des constantes d'intégration. L'équilibre est donc stable puisque, quelles que soient les conditions initiales, la perturbation η reste bornée au cours du temps.

De façon alternative, la question II peut être abordée en commençant par simplifier la fonction $f(\eta)$ en écrivant

$$\begin{aligned}
f(\eta) &= -mah\cos(\theta_{eq} + \eta) - mgh\sin(\theta_{eq} + \eta) \\
&= -mah(\cos\theta_{eq}\cos\eta - \sin\theta_{eq}\sin\eta) - mgh(\sin\theta_{eq}\cos\eta + \cos\theta_{eq}\sin\eta) \\
&= -mh\cos\theta_{eq}(a + g\,\mathrm{tg}\,\theta_{eq})\cos\eta + mh\cos\theta_{eq}(a\,\mathrm{tg}\,\theta_{eq} - g)\sin\eta \\
&= -mh\cos\theta_{eq}(a + g\,[-a/g])\cos\eta + mh\cos\theta_{eq}(a\,[-a/g] - g)\sin\eta \\
&= -\frac{mh}{g}\cos\theta_{eq}(a^2 + g^2)\sin\eta
\end{aligned}$$

La résolution du problème peut ensuite être menée exactement comme ci-dessus en appliquant la formule de Taylor à la fonction sinus.

Cette expression de f suggère qu'une majoration plus fine de l'erreur peut être obtenue en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2. Exploitant le fait que le développement de MacLaurin de $\sin\eta$ ne comporte que des puissances impaires de η, on peut en effet écrire

$$f(\eta) = f(0) + f'(0)\eta + f''(0)\frac{\eta^2}{2} + \mathcal{R}_2(\eta) = f'(0)\eta + \mathcal{R}_2(\eta)$$

où

$$\mathcal{R}_2(\eta) = \frac{\eta^3}{3!} f'''(\xi), \quad \xi \in]0,\eta[\text{ (ou }]\eta,0[)$$

On calcule aisément

$$f'''(\eta) = \frac{mh}{g}\cos\theta_{eq}(a^2+g^2)\cos\eta$$

de sorte que

$$\mathcal{R}_2(\eta) = \frac{\eta^3}{3!}\frac{mh}{g}\cos\theta_{eq}(a^2+g^2)\cos\xi, \quad \xi \in]0,\eta[\text{ (ou }]\eta,0[)$$

Tenant compte de $|\cos\xi| \leq 1$, on obtient la majoration

$$|\mathcal{R}_2(\eta)| \leq \frac{|\eta|^3}{3!}\frac{mh}{g}\cos\theta_{eq}(a^2+g^2)$$

Remarquons encore que, en exploitant la relation entre les fonctions cos et tg, on peut écrire

$$\cos\theta_{eq} = \cos(\mathrm{arctg}[-g/a]) = \frac{g}{\sqrt{a^2+g^2}}$$

de sorte que

$$f(\eta) \sim -mh\sqrt{a^2+g^2}\,\eta \qquad \text{et} \qquad |\mathcal{R}_2| \leq \frac{mh\sqrt{a^2+g^2}}{3!}|\eta|^3$$

Question III

L'équation

$$\frac{d^3h}{dz^3} - m^2\frac{dh}{dz} = \lambda$$

est une équation différentielle linéaire non homogène. Sa solution générale $h(z)$ est donc la somme de la solution générale $h_h(z)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $h_p(z)$ de l'équation non homogène.

Commençons par rechercher la solution générale de l'équation homogène

$$h''' - m^2h' = 0$$

L'équation étant linéaire à coefficients constants, nous considérons le polynôme caractéristique associé

$$\mathcal{L}(x) = x^3 - m^2x = x(x^2-m^2)$$

qui possède les 3 zéros simples $x = 0$ et $x = \pm m$. La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors

$$h_h(z) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{mz} + C_3\,\mathrm{e}^{-mz}$$

où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes.

L'examen de l'équation non homogène (ou l'application de la méthode de l'exponentielle-polynôme) suggère de rechercher une solution particulière de la forme $h_p(z) = Cz$ où C est une constante. En injectant cette expression dans l'équation, on trouve aisément $C = -\lambda/m^2$ de sorte que

$$h_p(z) = -\frac{\lambda}{m^2}z$$

La solution générale de l'équation différentielle est alors donnée par

$$h(z) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{mz} + C_3\,\mathrm{e}^{-mz} - \frac{\lambda}{m^2} z$$

Les constantes C_1, C_2 et C_3 peuvent être déterminées en utilisant les conditions auxiliaires du problème différentiel : $h(0) = 0$, $h'(1) = \mu$, $h'(-1) = \mu$.

On a

$$h'(z) = mC_2\,\mathrm{e}^{mz} - mC_3\,\mathrm{e}^{-mz} - \frac{\lambda}{m^2}$$

de sorte que les conditions s'écrivent

$$\begin{cases} h(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ h'(1) = mC_2\,\mathrm{e}^{m} - mC_3\,\mathrm{e}^{-m} - \dfrac{\lambda}{m^2} = \mu \\ h'(-1) = mC_2\,\mathrm{e}^{-m} - mC_3\,\mathrm{e}^{m} - \dfrac{\lambda}{m^2} = \mu \end{cases}$$

Après résolution du système, on obtient

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -C_3 = \frac{m^2\mu + \lambda}{m^3(\mathrm{e}^m + \mathrm{e}^{-m})}$$

En introduisant les fonctions hyperboliques, la solution du problème s'écrit alors

$$h(z) = \frac{m^2\mu+\lambda}{2m^3\operatorname{ch} m}\,\mathrm{e}^{mz} - \frac{m^2\mu+\lambda}{2m^3\operatorname{ch} m}\,\mathrm{e}^{-mz} - \frac{\lambda}{m^2}z = \frac{m^2\mu+\lambda}{m^3\operatorname{ch} m}\operatorname{sh}(mz) - \frac{\lambda}{m^2}z$$

Question IV

i. En inversant les relations

$$\begin{cases} \xi = x - ut \\ \tau = t \end{cases} \qquad (\clubsuit)$$

on obtient

$$\begin{cases} x = \xi + u\tau \\ t = \tau \end{cases}$$

qui réalise la correspondance inverse. Les relations définissent donc une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Les relations ($\clubsuit$) sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^2$ et telles que le Jacobien

$$J = \frac{\partial(\xi,\tau)}{\partial(x,t)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial t} \\ \dfrac{\partial\tau}{\partial x} & \dfrac{\partial\tau}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^2$$

Dès lors, les relations définissent un changement de variables régulier d'ordre infini entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$.

ii. À partir des relations ($\clubsuit$), le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau} = -u\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\tau}$$

et donc

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}$$

iii. L'équation

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = \kappa\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \qquad (\diamondsuit)$$

se transforme en

$$-u\frac{\partial C^*}{\partial \xi} + \frac{\partial C^*}{\partial \tau} + u\frac{\partial C^*}{\partial \xi} = \kappa\frac{\partial^2 C^*}{\partial \xi^2}$$

où $C^*(\xi,\tau) = C(x[\xi,\tau], y[\xi,\tau])$, soit, finalement,

$$\frac{\partial C^*}{\partial \tau} = \kappa\frac{\partial^2 C^*}{\partial \xi^2} \qquad (\spadesuit)$$

iv. On constate que l'équation ($\spadesuit$) pour $C^*(\xi,\tau)$ et u quelconque est équivalente à l'équation ($\diamondsuit$) pour $C(x,t)$ si $u=0$. On sait que la solution, pour un rejet unitaire en $(x,t)=(0,0)$, de

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

est donnée par

$$C(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right)$$

La solution de ($\spadesuit$) pour un rejet unitaire effectué en $(x,t)=(0,0)$, soit $(\xi,\tau)=(0,0)$, est donc donnée par

$$C^*(\xi,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa\tau}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\kappa\tau}\right)$$

ou encore, en revenant aux variables initiales,

$$C(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}}\exp\left[-\frac{(x-ut)^2}{4\kappa t}\right]$$