NOM : .... PRÉNOM : ....

NUMÉRO D'ORDRE : ....

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2021

MATH0002 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles et sur ce questionnaire votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le questionnaire avec vos copies.

Question I

On considère l'intégrale

$$I = \int_0^1 \cos(e^{-x})\,dx$$

i. Énoncez les hypothèses minimales que doit vérifier une fonction f pour pouvoir lui appliquer la formule de Taylor à l'ordre 5 au voisinage de 0.
En particulier, sur quel intervalle cette formule permet-elle d'écrire

$$\cos y = \mathcal{P}_5(y) + \mathcal{R}_5(y)$$

où $\mathcal{P}_5(y)$ est le polynôme de Taylor à l'ordre 5 ?

ii. Déterminez $\mathcal{P}_5(y)$ et l'expression de l'erreur $\mathcal{R}_5(y)$ correspondante.

iii. Déterminez une constante C majorant l'erreur absolue $|\mathcal{R}_5(y)|$ sur $[0,1]$.

iv. Évaluez l'approximation de I donnée par

$$\tilde{I} = \int_0^1 \mathcal{P}_5(e^{-x})\,dx$$

v. Déterminez une borne de l'erreur $|I - \tilde{I}|$.

Question II

On étudie le mouvement d'un point matériel P se déplaçant sans frottement sur une tige tournant à vitesse angulaire constante autour d'un point fixe O. La particule est soumise à la pesanteur et à une force centrale attractive de la part du point O proportionnelle à la distance entre O et P. En variables adimensionnelles, le mouvement du point matériel est décrit par l'équation différentielle

$$\rho'' + (n-1)\rho = -\sin\tau$$

où $\rho(\tau)$ représente la position en fonction du temps et où $n > 0$ est un paramètre réel mesurant l'influence relative de la force attractive et de la rotation de la tige.

i. Déterminez la solution générale de cette équation différentielle en discutant en fonction du paramètre n.

ii. Déterminez complètement $\rho(\tau)$ dans le cas où $n = 5$, $\rho(0) = 1$ et $\rho'(0) = 0$.

Tournez la page.

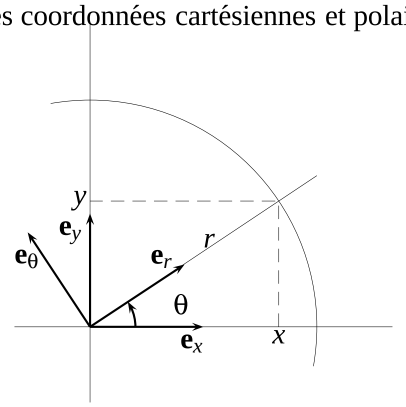
Question III

i. Si $f(x) \sim \frac{1}{x^3}$ pour $x \to 0$, peut-on en déduire que $\lim_{x\to 0}\left[f(x) - \frac{1}{x^3}\right] = 0$? Justifiez.

ii. En partant de la définition de la différentiabilité d'une fonction f dans $\mathbb{R}^2$, montrez que, si f est différentiable au voisinage de $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, elle est continue en ce point.

iii. On considère le changement de variables entre les coordonnées cartésiennes et polaires défini par les relations (voir figure)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



Il s'agit d'un changement de variables régulier d'ordre infini entre les ouverts

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \,:\, y = 0, x \geq 0\} \quad \text{et} \quad \Omega' = \{(r,\theta) \,:\, r \in]0,+\infty[, \theta \in]0,2\pi[\}$$

Ce résultat ne doit pas être redémontré.

(a) Établissez l'expression des opérateurs $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ en fonction des variables r et θ.

(b) Établissez l'expression de l'opérateur vectoriel $\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$ en fonction des variables r et θ et des vecteurs unitaires $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ des coordonnées polaires.

iv. Soit le champ vectoriel $\mathbf{s} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ exprimé en fonction des coordonnées cartésiennes.

(a) Calculez la divergence de $\mathbf{s}$.

(b) Calculez le rotationnel de $\mathbf{s}$.

SOLUTION

Question I

i. La formule de Taylor peut être appliquée à l'ordre 5 sur un intervalle $[0,y]$ (resp. $[y,0]$) à toute fonction f réelle, $\in C_5([0,y])$ (resp. $\in C_5([y,0])$ et 6 fois dérivable sur $]0,y[$ (resp. $]y,0[$).
La fonction cos étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, la formule de Taylor proposée est donc applicable sur $\mathbb{R}$.

Hypothèses de la formule de Taylor : 2 pts, pénalité de 1 pt par hypothèse fausse ou manquante
Particularisation à cos : 2 pts dont 1 pt pour $\mathbb{R}$
Total i : 4 pts

ii. Le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_5(y)$ et l'expression de l'erreur $\mathcal{R}_5(y)$ au voisinage de l'origine sont respectivement définis par

$$\mathcal{P}_5(y) \ = \ f(0)+yf'(0)+\frac{y^2}{2!}f''(0)+\frac{y^3}{3!}f^{(3)}(0)+\frac{y^4}{4!}f^{(4)}(0)+\frac{y^5}{5!}f^{(5)}(0)$$

et

$$\mathcal{R}_5(y) = \frac{y^6}{6!}f^{(6)}(\xi) \quad \text{où } \xi \in]0,y[\text{ (ou }]y,0[).$$

Connaissance de l'expression générale de $\mathcal{P}_5$: 1 pt
Connaissance de l'expression générale de $\mathcal{R}_5$: 1 pt
Information sur ξ : 1 pt

Pour la fonction $f(y) = \cos y$, il vient successivement $f(0) = 1$ et

$$\begin{array}{ll}
f'(y) = -\sin(y) & f'(0) = 0 \\
f''(y) = -\cos(y) & f''(0) = -1 \\
f^{(3)}(y) = \sin(y) & f^{(3)}(0) = 0 \\
f^{(4)}(y) = \cos(y) & f^{(4)}(0) = 1 \\
f^{(5)}(y) = -\sin(y) & f^{(5)}(0) = 0 \\
f^{(6)}(y) = -\cos(y) &
\end{array}$$

Mise en oeuvre de la formule : 1 pt

de sorte que

$$\mathcal{P}_5(y) = 1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R}_5(y) = -\frac{y^6}{720}\cos(\xi) \quad \text{où} \quad \xi \in]0,y[\text{ (ou }]y,0[)$$

Expression de $\mathcal{P}_5$: 1 pt
Expression de $\mathcal{R}_5$: 1 pt

Total ii : 6 pts

iii. Il découle de ce qui précède que

$$|\mathcal{R}_5(y)| = \frac{1}{720}\left|y^6\right| |\cos(\xi)| \quad \text{où} \quad \xi \in]0,y[\text{ (ou }]y,0[)$$

Si $y \in [0,1]$, $\xi \in]0,1[$ et $|\cos\xi| < 1$ de sorte que

$$|\mathcal{R}_5(y)| < \frac{1}{720}$$

Total iii : 3 pts

iv. Utilisant le polynôme de Taylor obtenu au point ii. en $y = \mathrm{e}^{-x} \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{I} = \int_0^1 \mathcal{P}_5(\mathrm{e}^{-x})\,dx &= \int_0^1 \left[1-\frac{(\mathrm{e}^{-x})^2}{2}+\frac{(\mathrm{e}^{-x})^4}{24}\right]dx \\
&= \int_0^1 \left[1-\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-4x}}{24}\right]dx \\
&= \left[x+\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4}-\frac{\mathrm{e}^{-4x}}{96}\right]_0^1 \\
&= 1-\frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{4}+\frac{1-\mathrm{e}^{-4}}{96}
\end{aligned}$$

Méthode : 1 pt
Résultat correct : 2 pts
Total iv : 3 pts

v. Exploitant les résultats précédents, on a

$$I = \int_0^1 \cos(\mathrm{e}^{-x})\, dx = \int_0^1 \left[\mathcal{P}_5(\mathrm{e}^{-x}) + \mathcal{R}_5(\mathrm{e}^{-x})\right] dx = \tilde{I} + \int_0^1 \mathcal{R}_5(\mathrm{e}^{-x})\, dx$$

Expression de $I - \tilde{I}$ en fonction de $\mathcal{R}_5$: 1 pt

de sorte que

$$\left|I - \tilde{I}\right| = \left|\int_0^1 \mathcal{R}_5(\mathrm{e}^{-x})\, dx\right| \leq \int_0^1 \left|\mathcal{R}_5(\mathrm{e}^{-x})\right| dx$$

Puisque x varie dans l'intervalle $[0,1]$, e^{-x} est dans l'intervalle $[\mathrm{e}^{-1},1] \subset [0,1]$. Il résulte de la majoration obtenue au point iii. que

$$\left|I - \tilde{I}\right| < \int_0^1 \frac{1}{720}\, dx = \frac{1}{720}$$

Majoration : 3 pts, dont 1 pt pour la majoration de la valeur absolue de l'intégrale et 1 pt pour la justification des intervalles de variation

Total v : 4 pts

TOTAL QI : 20 PTS

Question II

i. L'équation

$$\rho'' + (n-1)\rho = -\sin\tau$$

est une équation différentielle linéaire non homogène. Sa solution générale $\rho(\tau)$ est donc la somme de la solution générale $\rho_h(\tau)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $\rho_p(\tau)$ de l'équation non homogène.

Décomposition de la solution en $\rho_h + \rho_p$ (annoncée ou mise en pratique) : 2 pts, dont 1 pt pour la justification par la linéarité.

Commençons par rechercher la solution générale de l'équation homogène

$$\rho'' + (n-1)\rho = 0$$

L'équation étant linéaire à coefficients constants, nous considérons le polynôme caractéristique associé $\mathcal{L}(z) = z^2 + n - 1$ dont la nature des zéros dépend du paramètre n.

Polynôme caractéristique : 2 pts, pas de pénalité si la justification "linéaire à coefficients constants" manque.

(a) Si $n < 1$, $\mathcal{L}(z)$ possède les deux zéros réels $z = \pm\sqrt{1-n}$ et la solution de l'équation homogène s'écrit

$$\rho_h(\tau) = A\exp(\sqrt{1-n}\,\tau) + B\exp(-\sqrt{1-n}\,\tau)$$

ou encore

$$\rho_h(\tau) = C\,\mathrm{ch}(\sqrt{1-n}\,\tau) + D\,\mathrm{sh}(\sqrt{1-n}\,\tau)$$

où A, B, C et D sont des constantes.

Zéros si $n < 1$: 1 pt
$\rho_h(\tau)$ si $n < 1$: 2 pts, forme alternative pas attendue

(b) Si $n = 1$, $\mathcal{L}(z)$ possède le zéro double $z = 0$ et la solution de l'équation homogène s'écrit

$$\rho_h(\tau) = A\tau + B$$

où A et B sont des constantes.

Zéros si $n = 1$: 1 pt
$\rho_h(\tau)$ si $n = 1$: 2 pts

(c) Si $n > 1$, $\mathcal{L}(z)$ possède les deux zéros complexes conjugués $z = \pm i\sqrt{n-1}$ et la solution de l'équation homogène s'écrit

$$\rho_h(\tau) = A\exp(i\sqrt{n-1}\,\tau) + B\exp(-i\sqrt{n-1}\,\tau)$$

ou encore, sous forme réelle,

$$\rho_h(\tau) = C\cos(\sqrt{n-1}\,\tau) + D\sin(\sqrt{n-1}\,\tau)$$

où A, B, C et D sont des constantes.

Zéros si $n > 1$: 1 pt
$\rho_h(\tau)$ si $n > 1$: 2 pts (forme réelle ou non)

Puisque l'équation est linéaire à coefficients constants et que le second membre

$$f(\tau) = -\sin\tau = \Im\left[-e^{i\tau}\right]$$

est la partie imaginaire d'une expression du type exponentielle-polynôme, nous pouvons rechercher une solution particulière de la forme

Utilisation d'une méthode appropriée : 2 pts dont 1 pt pour la justification adaptée à la méthode

$$\rho_p(\tau) = \Im\left[K t^{\alpha}\, e^{i\tau}\right]$$

où K est une constante et α est la multiplicité de i comme zéro du polynôme caractéristique. Deux cas se présentent alors.

(a) Si $n \neq 2$, i n'est pas un zéro de $\mathcal{L}(z)$, $\alpha = 0$ et on peut chercher une solution particulière de la forme

$$\Im\left[K\, e^{i\tau}\right]$$

Introduisant cette solution dans l'équation

$$\rho'' + (n-1)\rho = \Im\left[-e^{i\tau}\right]$$

et laissant provisoirement tomber les symboles $\Im$ (ce qui est permis puisque les coefficients sont réels et l'équation linéaire), nous obtenons

$$-K\, e^{i\tau} + (n-1)K\, e^{i\tau} = -e^{i\tau}$$

soit

$$K = \frac{1}{2-n}$$

et donc

$\rho_p(\tau)$ si $n \neq 2$: 2 pts

$$\rho_p(\tau) = \Im\left[\frac{1}{2-n}\, e^{i\tau}\right] = \Im\left[\frac{1}{2-n}(\cos\tau + i\sin\tau)\right] = \frac{\sin\tau}{2-n}$$

(b) Si $n = 2$, i est un zéro simple de $\mathcal{L}(z)$, $\alpha = 1$ et on peut chercher une solution particulière de la forme

$$\Im\left[K\tau\, e^{i\tau}\right]$$

Introduisant comme ci-dessus cette solution dans l'équation

$$\rho'' + (n-1)\rho = \rho'' + \rho = \Im\left[-e^{i\tau}\right]$$

nous obtenons

$$2iK\, e^{i\tau} - K\tau\, e^{i\tau} + K\tau\, e^{i\tau} = -e^{i\tau}$$

soit

$$K = \frac{-1}{2i} = \frac{i}{2}$$

et donc

$\rho_p(\tau)$ si $n = 2$: 3 pts

$$\rho_p(\tau) = \Im\left[\frac{i}{2}\tau\, e^{i\tau}\right] = \Im\left[\frac{i}{2}\tau(\cos\tau + i\sin\tau)\right] = \frac{\tau\cos\tau}{2}$$

En conclusion, la solution générale de l'équation différentielle s'écrit

- Si $n < 1$,

$$\rho(\tau) = C\,\mathrm{ch}(\sqrt{1-n}\,\tau) + D\,\mathrm{sh}(\sqrt{1-n}\,\tau) + \frac{\sin\tau}{2-n}$$

Solution générale si $n < 1$ sous une forme ou une autre : 1 pt

- Si $n = 1$,

$$\rho(\tau) = A\tau + B + \frac{\sin\tau}{2-n} = A\tau + B + \sin\tau$$

Solution générale si $n = 1$: 1 pt, seulement attribué si n est remplacé par 1

- Si $n > 1$ et $n \neq 2$,

$$\rho(\tau) = C\cos(\sqrt{n-1}\,\tau) + D\sin(\sqrt{n-1}\,\tau) + \frac{\sin\tau}{2-n}$$

- Si $n = 2$,

$$\rho(\tau) = C\cos\tau + D\sin\tau + \frac{\tau\cos\tau}{2}$$

Solution générale (sous forme réelle ou pas) si $n > 1$ et $n \neq 2$: 1 pt
Solution générale (sous forme réelle ou pas) si $n = 2$: 1 pt, seulement attribué si n est remplacé par 2
Total i. : 24 pts

ii. La solution générale dans le cas $n = 5$, s'écrit

Solution générale si $n = 5$: 1 pt

$$\rho(\tau) = C\cos(2\,\tau) + D\sin(2\,\tau) - \frac{\sin\tau}{3}$$

Les conditions initiales $\rho(0) = 1$ et $\rho'(0) = 0$ conduisent aux relations

Détermination des constantes : 4 pts

$$\begin{cases} C = 1 \\ 2D - \dfrac{1}{3} = 0 \quad \text{soit} \quad D = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

La loi du mouvement s'écrit donc

Loi du mouvement sous forme réelle : 1 pt

$$\rho(\tau) = \cos(2\,\tau) + \frac{\sin(2\,\tau)}{6} - \frac{\sin\tau}{3}$$

Total ii. : 6 pts
TOTAL QII : 30 PTS

Question III

i. Non, comme le montre l'exemple de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}$$

Contre-exemple correct : 2 pts

telle que

Vérification de l'hypothèse et négation de la thèse : 1 pt

$$f(x) \sim \frac{1}{x^3}, \qquad (x \to 0) \qquad \text{mais} \qquad \lim_{x\to 0}\left[f(x) - \frac{1}{x^3}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$$

Total i. : 3 pts
Pas de point si réponse correcte donnée sans justification.

ii. Par définition, une fonction f est différentiable dans un voisinage $\mathcal{V}$ de $\mathsf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ si f est dérivable sur $\mathcal{V}$ et si

Particularisation de la réponse à $\mathbb{R}^2$: 1 pt

$$f(\mathsf{x}_0 + \mathsf{h}) - f(\mathsf{x}_0) = \sum_{i=1}^{2} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathsf{x}_0) + o(|\mathsf{h}|), \qquad (\mathsf{h} \to 0)$$

Dès lors

Définition de la différentiabilité : 2 pts

$$\lim_{\mathsf{h}\to 0}\left[f(\mathsf{x}_0 + \mathsf{h}) - f(\mathsf{x}_0)\right] = \lim_{\mathsf{h}\to 0}\left[\sum_{i=1}^{2} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathsf{x}_0) + o(|\mathsf{h}|)\right] = 0$$

puisque, d'une part,

Démonstration de la continuité : 2 pts

$$h_i \to 0 \text{ si } \mathsf{h} \to 0$$

et que, d'autre part, par définition de la relation o,

$$\lim_{\mathsf{h}\to 0} o(|h|) = 0$$

On obtient donc

Total ii. : 5 pts

$$\lim_{\mathsf{h}\to 0} f(\mathsf{x}_0 + \mathsf{h}) = f(\mathsf{x}_0)$$

ce qui exprime la continuité de f en x_0.

iii. (a) Le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'écrire

Utilisation correcte du théorème de dérivation des fonctions composées : 3 pts

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} \qquad (\clubsuit)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} \qquad (\diamondsuit)$$

Combinant ces relations selon $r\cos\theta\cdot(\clubsuit) - \sin\theta\cdot(\diamondsuit)$, on obtient

$$r\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} = r\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} + r\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial x} - r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} = r\frac{\partial}{\partial x}$$

soit

Expression de $\frac{\partial}{\partial x}$ en coordonnées polaires : 1 pt

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

De même, évaluant $r\sin\theta\cdot(\clubsuit) + \cos\theta\cdot(\diamondsuit)$, on obtient

$$r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} = r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial y} = r\frac{\partial}{\partial y}$$

soit

Expression de $\frac{\partial}{\partial y}$ en coordonnées polaires : 1 pt

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Total (a) : 5 pts

(b) Les vecteurs unitaires des coordonnées cartésiennes s'expriment en fonction de ceux des coordonnées polaires suivant (voir figure dans l'énoncé)

$$\mathbf{e}_x = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{e}_y = \sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta$$

de sorte que l'opérateur nabla s'écrit finalement

Expression de $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$ en fonction de $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_r$: 1 pt

$$\begin{aligned}
\nabla &= \mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} \\
&= (\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&\qquad + (\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= \mathbf{e}_r\left(\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&\qquad + \mathbf{e}_\theta\left(-\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}
\end{aligned}$$

Expression correcte de ∇ : 2 pts, dont 1 pt pour la simplification

Total (b) : 3 pts

Total iii. : 8 pts

iv. (a) La divergence de $\mathbf{s} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ est donnée par

$$\nabla \cdot \mathbf{s} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Total (a) : 2 pts

(b) En procédant formellement pour le calcul du déterminant, le rotationnel de $\mathbf{s}$ se calcule suivant

$$\nabla \wedge \mathbf{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x - \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

Total (b) : 2 pts
Total iv. : 4 pts

TOTAL QIII : 20 PTS