Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2022

MATH0002-4 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez l'enveloppe et le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Définissez mathématiquement $\lim_{y\to-\infty} f(y) = +\infty$.

ii. La relation entre le taux de cisaillement γ et les tensions visqueuses τ dans le sang peut être décrite par une modification du modèle de Casson se traduisant par

$$\tau = \gamma\left[\sqrt{\mu_\infty} + \sqrt{\frac{\tau_\star}{\gamma}}\left(1-e^{-\sqrt{m\gamma}}\right)\right]^2$$

où μ_∞, $\tau_\star$ et m désignent des paramètres strictement positifs.

Déterminez un comportement asymptotique de τ en fonction de γ lorsque le taux de cisaillement est faible, *i.e.* pour $\gamma \to 0^+$.

iii. D'une part, une force $\mathbf{F}$ est dite conservative si elle dépend de la position (x,y,z) du point où elle s'applique par le biais d'une loi du type $\mathbf{F} = -\nabla V$ où $V = V(x,y,z)$ est appelé le potentiel de la force. D'autre part, la puissance $\mathcal{P}$ développée par une force $\mathbf{F}$ dont le mouvement du point d'application est décrit par le vecteur position $\mathbf{s}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z$ vaut

$$\mathcal{P} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

Démontrez que la puissance $\mathcal{P}$ développée par une force conservative est telle que

$$\mathcal{P}(t) = -\frac{d}{dt}V(x(t),y(t),z(t))$$

Quelles conditions sur les fonctions $V(x,y,z)$, $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ permettent d'établir ce résultat ?

iv. Sous quelles conditions les relations

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta,\sigma) \\ y = y(\xi,\eta,\sigma) \\ z = z(\xi,\eta,\sigma) \end{cases}$$

définissent-elles un changement de variables régulier d'ordre 2 entre deux ouverts Ω et Ω' de $\mathbb{R}^3$?

Tournez la page.

Question II

On se propose d'approcher la fonction

$$f(x) = \operatorname{arcth} \frac{x}{x-1}$$

en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de 0.

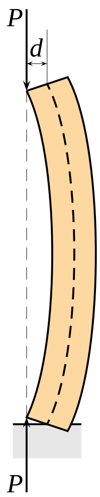
i. Justifiez théoriquement cette application de la formule de Taylor. Pour quelles valeurs de x la formule est-elle applicable ?

ii. Déterminez le polynôme de Taylor $\mathcal{P}_2(x)$ de degré 2 et l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ correspondante.

iii. Montrez que l'erreur $|\mathcal{R}_2(x)|$ est inférieure à $5 \cdot 10^{-3}$ pour tout $x \in [0, 10^{-1}]$.

Question III

La déformation $y(x)$ d'une poutre droite prismatique de longueur ℓ chargée d'une force constante d'intensité $P > 0$, parallèle à son axe et excentrée d'une distance $d > 0$ est décrite par



$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + (y+d)P = 0 \qquad (\diamondsuit)$$

où E et I sont des constantes strictement positives correspondant respectivement au module d'élasticité et au moment d'inertie de la section droite de la poutre.

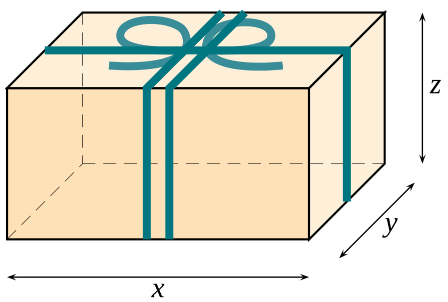
i. Déterminez la solution générale de $(\diamondsuit)$.

ii. Déterminez la déformation de la poutre dont les extrémités sont bloquées ($y(0) = y(\ell) = 0$) pour toutes les valeurs de $P > 0$ pour lesquelles le problème différentiel correspondant admet une solution unique.

iii. Déterminez la *charge critique d'Euler* P_{cr}, *i.e.* la plus petite valeur de $P > 0$ pour laquelle le problème différentiel ci-dessus n'admet pas une solution unique. Montrez que celle-ci correspond à la ruine de la structure en calculant $\lim\limits_{P \to P_{cr}^-} y(\ell/2)$.

Question IV

Un magasin décide d'emballer chacun de ses cadeaux de Noël dans une boîte parallélépipédique décorative entourée par un ruban. Le ruban doit faire deux fois le tour de la boîte dans une direction et une fois dans un plan perpendiculaire (cf illustration ci-contre). En outre, un nœud utilisant 70 cm du ruban vient terminer l'emballage.
Déterminez le volume et les dimensions x, y et z de la boîte de plus grand volume pouvant être ficelée de la sorte en utilisant un ruban d'une longueur d'exactement 250 cm (nœud compris). Justifiez.



SOLUTION TYPE

Question I

i. L'expression $\lim_{y\to-\infty} f(y) = +\infty$ peut être traduite mathématiquement par

$$(\forall M > 0)\,(\exists N > 0)\,(\forall y \in \operatorname{dom} f : y \leq -N) : f(y) \geq M$$

où dom f désigne le domaine de définition de la fonction f.

ii. Soit

$$\tau = \gamma\left[\sqrt{\mu_\infty} + \sqrt{\frac{\tau_\star}{\gamma}}(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{m\gamma}})\right]^2$$

La formule de Taylor appliquée à la fonction réelle $\mathrm{e}^x \in C_\infty(\mathbb{R})$ permet d'écrire

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + O(x^2), \quad (x \to 0^+)$$

Lorsque le taux de cisaillement est faible, on a donc

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{m\gamma}} = 1 - \sqrt{m\gamma} + O(\gamma), \quad (\gamma \to 0^+)$$

On obtient alors successivement

$$1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{m\gamma}} \sim \sqrt{m\gamma}, \quad (\gamma \to 0^+)$$

et

$$\tau \sim \gamma\left[\sqrt{\mu_\infty} + \sqrt{\frac{\tau_\star}{\gamma}}\sqrt{m\gamma}\right]^2, \quad (\gamma \to 0^+)$$

c'est-à-dire

$$\tau \sim \gamma[\sqrt{\mu_\infty} + \sqrt{m\tau_\star}]^2, \quad (\gamma \to 0^+)$$

iii. Puisque $\mathbf{F} = -\nabla V$, la puissance développée par la force s'appliquant à un mobile dont la position varie au cours du temps selon $\mathbf{s}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{P} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt} &= -\nabla V\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt} \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{e}_z\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z\right) \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)\end{aligned}$$

où les dérivées partielles de V sont évaluées en la position $(x(t), y(t), z(t))$ du mobile à l'instant considéré. Par application du théorème de dérivation des fonctions composées, il vient donc

$$\mathcal{P} = -\frac{d}{dt}V(x(t), y(t), z(t))$$

Cette application peut être justifiée par la continue dérivabilité de la fonction V sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ contenant les positions successives $(x(t), y(t), z(t))$ du mobile, *i.e.* sa trajectoire, et la dérivabilité des fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sur l'intervalle de temps considéré.

iv. Les relations $x = x(\xi, \eta, \sigma)$, $y = y(\xi, \eta, \sigma)$ et $z = z(\xi, \eta, \sigma)$ définissent un changement de variables régulier d'ordre 2 entre les ouverts Ω et $\Omega' \subset \mathbb{R}^3$ si

- les relations sont bijectives, *i.e.* pour tout $(x,y,z) \in \Omega$, il existe un et un seul point $(\xi,\eta,\sigma) \in \Omega'$ tel que

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta,\sigma) \\ y = y(\xi,\eta,\sigma) \\ z = z(\xi,\eta,\sigma) \end{cases}$$

- les relations sont 2 fois continûment dérivables sur Ω' et leur Jacobien ne s'annule en aucun point de Ω', *i.e.*

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\sigma)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \sigma} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{sur} \quad \Omega'$$

Question II

i. La formule de Taylor peut être appliquée à la fonction

$$f(x) = \operatorname{arcth} \frac{x}{x-1}$$

à l'ordre 2 au voisinage de 0 pour tout x tel que f est réelle, $f \in C_2([0,x])$ (resp. $f \in C_2([x,0])$) et f est 3 fois dérivable sur $]0,x[$ (resp. sur $]x,0[$).
La fonction arcth étant réelle, définie et indéfiniment continûment dérivable sur $]-1,1[$ et le plus grand intervalle contenant l'origine sur lequel la fonction $x/(x-1)$ est trois fois dérivable étant $]-\infty,1[$, les hypothèses ci-dessus sont rencontrées pour tout $x < 1$ tel que

$$-1 < \frac{x}{x-1} < 1$$

La résolution de cette double inéquation conduit à $x-1 < x < 1-x$ puis à $x < 1/2$.
La formule de Taylor peut donc être appliquée dans les conditions envisagées sur l'intervalle $]-\infty,1/2[$.

ii. La formule de Taylor d'ordre 2 s'écrit

$$f(x) = f(0) + x\, f'(0) + \frac{x^2}{2!}\, f''(0) + \frac{x^3}{3!}\, f^{(3)}(\xi)$$

où $\xi \in]0,x[$ (ou $\xi \in]x,0[$ si $x < 0$).
On calcule tout d'abord

$$f'(x) = \frac{1}{1-\left(\frac{x}{x-1}\right)^2} \frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2 - x^2} = \frac{1}{2x-1}$$

de sorte que $f'(0) = -1$. Ensuite, il vient successivement

$$f''(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2}, \qquad f''(0) = -2$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{8}{(2x-1)^3}$$

Dès lors,

$$f(x) = \mathcal{P}_2(x) + \mathcal{R}_2(x)$$

où

$$\mathcal{P}_2(x) = -x - x^2$$

et

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{x^3}{3!}\frac{8}{(2\xi-1)^3}$$

iii. Pour tout $x \in [0, 10^{-1}]$, on a $0 < \xi < x \leq 10^{-1}$ et

$$|\mathcal{R}_3(x)| = \left|\frac{x^3}{3!}\frac{8}{(2\xi-1)^3}\right| = \frac{x^3}{3!}\frac{8}{|2\xi-1|^3}$$

où $0 \leq x^3 \leq 10^{-3}$, $|2\xi - 1| = 1 - 2\xi > 1 - 2\cdot 10^{-1} = 0.8$ et donc

$$|\mathcal{R}_2(x)| < \frac{10^{-3}}{3!}\frac{8}{0.8^3} = \frac{1}{6\cdot 64} = \frac{1}{384}$$

de sorte que, comme annoncé,

$$|\mathcal{R}_2(x)| \leq 5\cdot 10^{-3}$$

Question III

i. L'équation

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + (y+d)P = 0$$

peut s'écrire sous la forme canonique

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = -\frac{Pd}{EI}$$

Cette équation différentielle est linéaire et non homogène. Sa solution générale $y(x)$ est donc la somme de la solution générale $y_h(x)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $y_p(x)$ de l'équation non homogène.

Commençons par rechercher la solution générale de l'équation homogène

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0$$

Cette équation étant linéaire à coefficients constants, nous considérons le polynôme caractéristique associé

$$\mathcal{L}(z) = z^2 + \frac{P}{EI}$$

qui possède les deux zéros complexes conjugués $z = \pm i\sqrt{\frac{P}{EI}}$ de sorte que la solution de l'équation homogène s'écrit

$$y_h(x) = A\exp\left(i\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + B\exp\left(-i\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right)$$

ou encore, sous forme réelle,

$$y_h(x) = C\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + D\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right)$$

où A, B, C et D sont des constantes.

Le second membre étant constant, on identifie facilement la solution particulière constante $y_p = -d$. La solution générale s'écrit dès lors

$$y(x) = C\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + D\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) - d$$

ii. La prise en compte des conditions aux limites donne

$$y(0) = C - d = 0 \quad \text{soit} \quad C = d$$

et

$$y(\ell) = d\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\ell\right) + D\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\ell\right) - d = 0 \qquad (\diamond)$$

Cette condition ne peut conduire à la détermination de D et à une solution unique que si le sinus est différent de zéro, c'est-à-dire si

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\ell \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Dans ce cas,

$$D = d\,\frac{1-\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\ell\right)}{\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\ell\right)}$$

de sorte que, la déformation de la poutre s'exprime finalement par

$$y(x) = d\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + d\,\frac{1-\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\ell\right)}{\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\ell\right)}\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) - d$$

iii. La détermination des constantes C et D et d'une solution unique n'est pas possible si $\sqrt{P/EI}\,\ell = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. La *charge critique d'Euler* est la plus petite des valeurs de P correspondantes ($k = 1$), soit

$$P_{cr} = \pi^2\frac{EI}{\ell^2}$$

Pour cette valeur de P, on a

$$\sin\left(\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}\,\ell\right) = \sin\pi = 0, \qquad \cos\left(\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}\,\ell\right) = \cos\pi = -1$$

$$\sin\left(\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}\,\frac{\ell}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \cos\left(\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}\,\frac{\ell}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

de sorte que

$$\lim_{P\to P_{cr}^-} y(\ell/2) = +\infty$$

Ceci correspond physiquement à la ruine de la structure.

Question IV

Vu les dimensions x, y et z de la boite, les 250 cm du ruban se décomposent selon

$$2x + 4y + 6z + 70 = 250$$

où toutes les dimensions x, y et z sont exprimées en centimètres.

Il s'agit donc ici de rechercher le maximum de la fonction

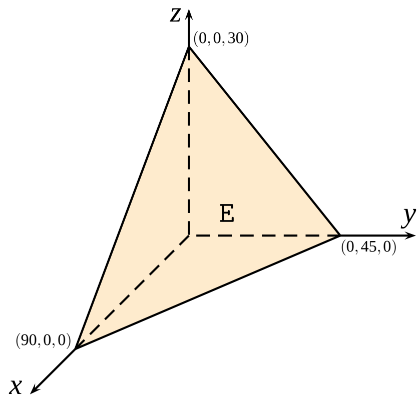
$$V = xyz$$

sous la contrainte

$$g(x,y,z) = 2x + 4y + 6z - 180 = 0$$

ainsi que des contraintes $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$ liées à la nature des variables.

Les contraintes définissent l'ensemble compact $\mathtt{E}$ des valeurs admissibles constitué de la portion du plan $g(x,y,z) = 0$ de sommets $(90,0,0)$, $(0,45,0)$ et $(0,0,30)$.



PREMIÈRE MÉTHODE DE RÉSOLUTION

Puisque les fonctions V et g sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^3$, et donc différentiables, et que $\nabla g = 2\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y + 6\mathbf{e}_z \neq \mathbf{0}$, on recherche le maximum parmi les points stationnaires du Lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(2x + 4y + 6z - 180)$$

Ceux-ci sont les solutions de $\nabla L = 0$, *i.e.* du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = yz - 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = xz - 4\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = xy - 6\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -2x - 4y - 6z + 180 = 0 \end{cases}$$

Écartant les solutions pour lesquelles une ou plusieurs dimensions sont nulles, puisque le volume correspondant serait nul et ne pourrait constituer le maximum recherché, on obtient aisément par élimination de λ entre les trois premières équations considérées deux par deux,

$$x = 2y = 3z$$

En injectant cette relation entre les dimensions dans la quatrième équation, il vient

$$2x+2x+2x=180$$

de sorte que $x=30$ cm, $y=15$ cm et $z=10$ cm. Le volume correspondant est donné par $V=30\cdot 15\cdot 10\,\mathrm{cm}^3 = 4500\,\mathrm{cm}^3$.

Ce point correspond au maximum absolu recherché par le raisonnement suivant.

- Le maximum existe puisque le domaine admissible $\mathtt{E}$ est un compact de $\mathbb{R}^3$ et que la fonction V est continue sur ce compact.
- Le maximum ne peut être atteint pour $x=0$, $y=0$ ou $z=0$ puisque le volume V y est nul alors qu'il est strictement positif sur le reste de $\mathtt{E}$.
- Les hypothèses de la méthode sont vérifiées de sorte que le maximum correspond à un point stationnaire du Lagrangien.
- Les dimensions identifiées correspondent au plus grand volume parmi ceux définis par les points stationnaires du Lagrangien.

Seconde méthode de résolution

En utilisant la contrainte $2x+4y+6z=180$, on peut exprimer la dimension x en fonction des deux autres, *i.e.*

$$x=90-2y-3z$$

et utiliser ce résultat pour exprimer le volume de la boite en fonction des seules variables y et z qui sont indépendantes. On a

$$\tilde{V}(y,z)\equiv V(90-2y-3z,y,z)=(90-2y-3z)yz$$

Le problème étant maintenant non contraint (si on excepte les contraintes de positivité sur les dimensions), on recherche les points stationnaires de $\tilde{V}$, *i.e.* les solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{V}}{\partial y}=z(90-2y-3z)-2yz=z(90-4y-3z)=0 \\ \dfrac{\partial\tilde{V}}{\partial z}=y(90-2y-3z)-3yz=y(90-6z-2y)=0 \end{cases}$$

Les solutions correspondant à $y=0$ ou $z=0$ ne peuvent conduire au maximum recherché puisque le volume associé est nul.

En simplifiant les facteurs z et y de ces équations et en soustrayant membre à membre les équations ainsi obtenues, on obtient la relation $3z=2y$. En injectant ce résultat dans la première équation, il vient

$$90-9z=0 \qquad \text{soit} \qquad z=10$$

Les dimensions sont donc $x=30$ cm, $y=15$ cm et $z=10$ cm. Le volume correspondant est donné par $V=30\cdot 15\cdot 10\,\mathrm{cm}^3=4500\,\mathrm{cm}^3$.

Ce point correspond au maximum absolu recherché par le raisonnement suivant.

- Le maximum recherché existe puisque le domaine admissible est un compact et que la fonction cible est continue sur ce compact.
- La fonction $\tilde{V}$ ne possède pas de point singulier.

- Le volume est nul à la frontière du domaine admissible.
- Les dimensions identifiées correspondent au plus grand volume parmi ceux définis par les points stationnaires de $\tilde{V}$.