NOM : PRÉNOM : ....

NUMÉRO D'ORDRE : ....

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2021

MATH0002 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles et sur cet énoncé votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez l'énoncé avec vos copies.

Question I

i. Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, peut-on affirmer que $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$, $(x \to x_0)$? Justifiez.

ii. En utilisant la formule de Taylor, déterminez les coefficients α, β et γ tels que

$$f'(x_0) = \alpha f(x_0 + \Delta x) + \beta f(x_0) + \gamma f(x_0 - 2\Delta x) + O(\Delta x^2), \qquad (\Delta x \to 0)$$

Quelle(s) hypothèse(s) minimale(s) doit remplir la fonction f pour justifier les développements effectués ?

iii. Définissez le concept de fonctions linéairement indépendantes sur un intervalle $\mathtt{I}$.
Si les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont définies sur $]-1,1[$ et linéairement indépendantes sur $]0,1[$, sont-elles linéairement indépendantes sur $]-1,1[$? Justifiez.

iv. Dans le cas particulier où $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x)$, avec $\mathbf{f} \in C_1(\mathbb{R}^3)$, et où $\mathbf{g}$ est un vecteur constant parallèle à $\mathbf{e}_z$, évaluez les deux membres de la relation

$$\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g}(\nabla \cdot \mathbf{f}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g}$$

et vérifiez l'égalité.

Question II

On étudie le mouvement d'une goutte d'eau de masse m chutant verticalement dans le champ de la pesanteur. Sa hauteur est représentée par la fonction $z(t)$ où t désigne le temps. À l'instant initial, la goutte est à une hauteur $z(0) = H$ avec une vitesse nulle, *i.e.* $\dot{z}(0) = 0$. Les grandeurs H, m, g, α et k sont des constantes strictement positives.

i. Déterminez la hauteur $z(t)$ de la goutte d'eau en fonction du temps si on néglige le frottement de l'air exercé sur la goutte sachant que $z(t)$ vérifie l'équation

$$m\ddot{z} = -mg \qquad \text{où} \qquad \dot{z} = \frac{dz}{dt}, \qquad \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

ii. Pour des petites gouttes chutant à faible vitesse, la loi de Stokes indique que le frottement de l'air est responsable d'une force de freinage proportionnelle à la vitesse. Déterminez la hauteur $z(t)$ de la goutte d'eau en fonction du temps dans ce cas sachant que

$$m\ddot{z} = -mg - \alpha\dot{z}$$

iii. Pour de plus grandes gouttes, la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse, *i.e.*

$$m\ddot{z} = -mg + k\dot{z}^2$$

Déterminez **la vitesse $\dot{z}(t)$** de la goutte d'eau en fonction du temps dans ce cas. On posera $u(t) = \dot{z}(t)$ pour résoudre cette dernière équation.

Tournez la page.

Question III

Une entreprise disposant d'un capital C peut investir ce capital dans trois actions liées respectivement à la modernisation de sa flotte de véhicules de livraison, au traitement des effluents de ses installations et au bien-être de son personnel. On note x, y et z les montants investis dans ces trois actions. Le bénéfice sociétal de ces investissements par rapport aux objectifs de développement durable est modélisé sous la forme d'une fonction

$$b(x,y,z) = \beta \frac{x^2 y^2 z^3}{C^6}$$

Les constantes C et β sont strictement positives.

i. Représentez graphiquement le domaine

$$\mathtt{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq C\}$$

des valeurs admissibles de (x,y,z).

ii. Déterminez les bénéfices sociétaux minimal et maximal pouvant être retirés de ces investissements, c'est-à-dire le minimum et le maximum absolus de $b(x,y,z)$ sur $\mathtt{E}$, ainsi que les valeurs (x,y,z) correspondantes.

SOLUTION TYPE

Question I

i. L'énoncé est faux comme le montre le contre-exemple constitué par les fonctions

$$f_1(x) = 1 + x \sim g_1(x) = 1, \quad (x \to 0)$$

et

$$f_2(x) = -1 + x \sim g_2(x) = -1, \quad (x \to 0)$$

pour lesquelles

$$f_1(x) + f_2(x) = 2x \not\sim g_1(x) + g_2(x) = 0, \quad (x \to 0)$$

ii. Pour toute fonction f trois fois continûment dérivable au voisinage de x_0, on a, par application de la formule de Taylor,

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x_0)\Delta x^2 + O\left(\Delta x^3\right), \quad (\Delta x \to 0)$$

et

$$\begin{aligned} f(x_0 - 2\Delta x) &= f(x_0) + f'(x_0)(-2\Delta x) + \frac{1}{2} f''(x_0)(-2\Delta x)^2 + O\left(\Delta x^3\right) \\ &= f(x_0) - 2f'(x_0)\Delta x + 2f''(x_0)\Delta x^2 + O\left(\Delta x^3\right), \quad (\Delta x \to 0) \end{aligned}$$

En combinant les deux expressions de façon à éliminer les termes en Δx^2, il vient

$$4f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - 2\Delta x) = 3f(x_0) + 6f'(x_0)\Delta x + O\left(\Delta x^3\right), \quad (\Delta x \to 0)$$

Dès lors,

$$f'(x_0) = \frac{2}{3\Delta x} f(x_0 + \Delta x) - \frac{1}{2\Delta x} f(x_0) - \frac{1}{6\Delta x} f(x_0 - 2\Delta x) + O(\Delta x^2), \quad (\Delta x \to 0)$$

Cette expression correspond au résultat recherché avec

$$\alpha = \frac{2}{3\Delta x}, \qquad \beta = -\frac{1}{2\Delta x} \qquad \text{et} \quad \gamma = -\frac{1}{6\Delta x}$$

iii. On dit que n fonctions $y_1, \ldots, y_n$ sont linéairement indépendantes sur $\mathtt{I}$ lorsque

$$\lambda_1 y_1(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x) = 0, \ \forall x \in \mathtt{I} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Si les fonctions $y_1, \ldots, y_n$, définies sur $]-1,1[$ sont linéairement indépendantes sur $]0,1[$, alors

$$\begin{aligned} &\lambda_1 y_1(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \in]-1,1[\\ &\qquad \Rightarrow \quad \lambda_1 y_1(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x) = 0, \quad \forall x \in]0,1[\\ &\qquad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 \end{aligned}$$

et les fonctions sont aussi linéairement indépendantes sur $]-1,1[$.

iv. Vérifions l'égalité

$$\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{g}) - \mathbf{g}(\nabla \cdot \mathbf{f}) + (\mathbf{g} \cdot \nabla)\mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{g} \tag{†}$$

dans le cas où $\mathbf{g} = a\mathbf{e}_z$ où a est une constante et $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x) = f_x(x)\mathbf{e}_x + f_y(x)\mathbf{e}_y + f_z(x)\mathbf{e}_z$.
On calcule

$$\mathbf{f} \wedge \mathbf{g} = [f_x(x)\mathbf{e}_x + f_y(x)\mathbf{e}_y + f_z(x)\mathbf{e}_z] \wedge a\,\mathbf{e}_z = -af_x(x)\mathbf{e}_y + af_y(x)\mathbf{e}_x$$

et, en procédant formellement pour le calcul du déterminant,

$$\nabla \wedge (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ af_y(x) & -af_x(x) & 0 \end{vmatrix} = -a\frac{\partial}{\partial x} f_x(x)\mathbf{e}_z$$

Par ailleurs,

$$(\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f} = \left(a\mathbf{e}_z\cdot\left[\mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right]\right)\mathbf{f}(x) = a\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{f}(x) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{g}(\nabla\cdot\mathbf{f}) = a\mathbf{e}_z\left(\frac{\partial}{\partial x}f_x(x)+\frac{\partial}{\partial y}f_y(x)+\frac{\partial}{\partial z}f_z(x)\right) = a\frac{\partial}{\partial x}f_x(x)\mathbf{e}_z$$

et, puisque $\mathbf{g}$ est constant,

$$(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}(\nabla\cdot\mathbf{g}) = \mathbf{0}$$

de sorte que l'égalité (†) s'écrit

$$-a\frac{\partial}{\partial x}f_x(x)\mathbf{e}_z = -a\frac{\partial}{\partial x}f_x(x)\mathbf{e}_z$$

et est bien vérifiée.

Question II

i. L'équation

$$m\ddot{z} = -mg$$

peut encore s'écrire

$$\ddot{z} = -g$$

et être résolue par intégration directe. On obtient successivement

$$\dot{z}(t) = -gt + C_1$$

et

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. Celles-ci peuvent être déterminées en utilisant les conditions initiales $\dot{z}(0) = 0$ et $z(0) = H$. On trouve aisément $C_1 = 0$ et $C_2 = H$.
Finalement,

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + H$$

ii. L'équation

$$m\ddot{z} = -mg - \alpha\dot{z}$$

peut encore s'écrire

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} = -mg$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire non homogène. Sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation non homogène, soit

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t)$$

Comme l'équation est linéaire à coefficients constants, on peut trouver la solution générale de l'équation homogène associée en considérant les zéros du polynôme caractéristique

$$\mathcal{L}(x) = mx^2 + \alpha x = x(mx+\alpha)$$

Celui-ci admet les zéros simples $x_1 = 0$ et $x_2 = -\alpha/m$ de sorte que la solution générale de l'équation homogène est

$$z_h(t) = A + B\,\mathrm{e}^{-\alpha t/m}$$

où A et B sont des constantes.
L'examen de l'équation non homogène (ou l'application de la méthode de l'exponentielle-polynôme) suggère de rechercher une solution particulière de la forme $z_p(t) = Ct$ où C est une

constante. En injectant cette expression dans l'équation, on trouve aisément $C = -mg/\alpha$ de sorte que

$$z_p(t) = -\frac{mg}{\alpha}t$$

La solution générale de l'équation différentielle est donc donnée par

$$z(t) = A + B\,\mathrm{e}^{-\alpha t/m} - \frac{mg}{\alpha}t$$

Les constantes A et B peuvent être déterminées en utilisant les conditions initiales

$$z(0) = A + B = H \quad \text{et} \quad \dot{z}(0) = -\frac{\alpha}{m}B - \frac{mg}{\alpha} = 0$$

soit

$$A = H + \frac{m^2 g}{\alpha^2} \quad \text{et} \quad B = -\frac{m^2 g}{\alpha^2}$$

La solution du problème s'écrit alors

$$z(t) = H - \frac{mg}{\alpha}t + \left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha t/m}\right)\frac{m^2 g}{\alpha^2}$$

iii. En suivant l'indication relative au changement de fonction inconnue $u(t) = \dot{z}(t)$, l'équation

$$m\ddot{z} = -mg + k\dot{z}^2$$

devient

$$m\dot{u} = -mg + ku^2$$

Il s'agit d'une équation à variables séparables qui conduit à

$$\frac{du}{1 - \dfrac{k}{gm}u^2} = -g\,dt$$

soit

$$\int \frac{du}{1 - \dfrac{k}{gm}u^2} = -\int g\,dt + C \qquad (\heartsuit)$$

où C est une constante.
Remarquons que les solutions singulières $u = \dot{z} = \pm\sqrt{gm/k}$ ne sont pas acceptables puisqu'elles ne vérifient pas la condition initiale $\dot{z}(0) = 0$.

On a alors, en évaluant les primitives des deux membres de l'équation,

$$\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\mathrm{arcth}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}u\right) = -gt + C$$

où le choix de la primitive ($\mathrm{arcth}\,y$ et pas $\mathrm{arcoth}\,y$) de la fonction $1/(1-y^2)$ est dicté par la condition initiale sur $\dot{z}$ qui indique que $y = u\sqrt{k/mg} = \dot{z}\sqrt{k/mg}$ présente une valeur initiale nulle.

La constante C est déterminée en considérant la condition initiale $u(0) = \dot{z}(0) = 0$, soit $C = 0$.
La vitesse recherchée s'écrit alors

$$\dot{z}(t) = u(t) = -\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t\right)$$

Remarquons qu'il est aussi possible de calculer une primitive de la fonction de u en utilisant la technique de primitivation des fractions simples. On a

$$\frac{1}{1-\dfrac{k}{gm}u^2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\sqrt{\dfrac{k}{mg}}u}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\sqrt{\dfrac{k}{mg}}u}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\int\frac{du}{1-\dfrac{k}{gm}u^2}&=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{mg}{k}}\ln\left|1-\sqrt{\frac{k}{mg}}u\right|+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{mg}{k}}\ln\left|1+\sqrt{\frac{k}{mg}}u\right|\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{mg}{k}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{k}{mg}}u}{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}u}\right|\end{aligned}$$

En exploitant ($\heartsuit$), il vient donc

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{mg}{k}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{k}{mg}}u}{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}u}\right|=-gt+C$$

où C est une constante. Cette expression peut encore s'écrire sous la forme

$$\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{k}{mg}}u}{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}u}\right|=-2\sqrt{\frac{kg}{m}}t+\tilde{C}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1+\sqrt{\frac{k}{mg}}\,u}{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}\,u}=\pm\mathrm{e}^{\tilde{C}}\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}=\hat{C}\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}$$

où $\tilde{C}$ et $\hat{C}$ sont des constantes. La solution du problème est obtenue en imposant que $u(0)=\dot{z}(0)=0$, ce qui donne $\hat{C}=1$.
On obtient alors

$$\frac{1+\sqrt{\frac{k}{mg}}\,u}{1-\sqrt{\frac{k}{mg}}\,u}=\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}$$

soit

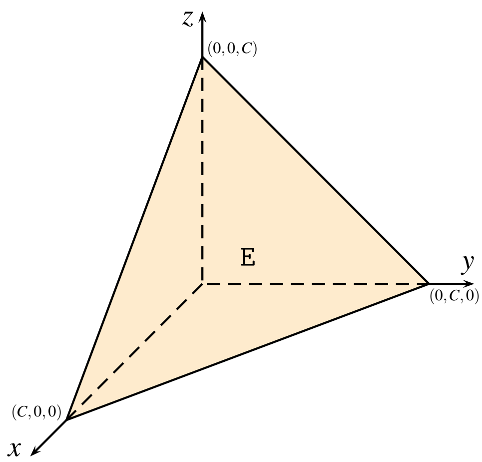
$$1+\sqrt{\frac{k}{mg}}u=\left(1-\sqrt{\frac{k}{mg}}u\right)\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}$$

et, finalement,

$$\begin{aligned}\dot{z}(t)=u(t)&=\sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}-1}{\mathrm{e}^{-2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}+1}\right)\\&=\sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}-\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}}{\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}+\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}}\right)=-\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\mathrm{th}\left(\sqrt{\frac{kg}{m}}t\right)\end{aligned}$$

Question III

i. L'ensemble E correspond à une pyramide à base triangulaire dont les sommets sont $(0,0,0)$, $(C,0,0)$, $(0,C,0)$ et $(0,0,C)$.



ii. Comme la fonction
$$b(x,y,z) = \beta \frac{x^2y^2z^3}{C^6}$$
est continue sur le compact E, elle y atteint nécessairement son minimum et son maximum absolus, ce qui assure l'existence d'une solution au problème considéré.

La fonction b dont on cherche les extrema est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}^3$, donc sur E. Dès lors, les extrema recherchés se trouvent soit parmi les points stationnaires de b situés dans l'intérieur de E, soit parmi les points situés sur la frontière de E.

a) Étude des points stationnaires de b dans l'intérieur de E .
Les points stationnaires de b vérifient

$$\nabla b = \mathbf{0} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial b}{\partial x} = \dfrac{\beta}{C^6}\, 2xy^2z^3 = 0 \\ \dfrac{\partial b}{\partial y} = \dfrac{\beta}{C^6}\, 2x^2yz^3 = 0 \\ \dfrac{\partial b}{\partial z} = \dfrac{\beta}{C^6}\, 3x^2y^2z^2 = 0 \end{cases}$$

Les points stationnaires sont les points $(0,y,z)$, $(x,0,z)$, $(x,y,0)$ et ceux-ci appartiennent à la frontière de E : les extrema recherchés n'appartiennent donc pas à l'intérieur de E, mais bien à la frontière.

b) Étude des points de la frontière de E.
La frontière de E est constituée de trois portions de plans triangulaires perpendiculaires aux axes,

$$\mathrm{E}_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x=0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ y+z \leq C\right\},$$
$$\mathrm{E}_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \geq 0,\ y=0,\ z \geq 0,\ x+z \leq C\right\},$$
$$\mathrm{E}_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z=0,\ x+y \leq C\right\},$$

et d'une portion de plan triangulaire de sommets $(C,0,0)$, $(0,C,0)$ et $(0,0,C)$

$$\mathrm{E}_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z = C\right\}$$

- *Étude des points de* E_1, E_2 *et* E_3.
  Sur E_1, E_2 et E_3, la fonction b est identiquement nulle. En effet,

$$b(0,y,z) = b(x,0,z) = b(x,y,0) = 0$$

Comme $b \geq 0$ sur $\mathtt{E}$, on peut affirmer que la valeur 0 est le minimum absolu de b sur $\mathtt{E}$.

- *Étude des points de* $\mathtt{E}_4$.

Les extrema de b sur la surface $\mathtt{E}_4$ peuvent être recherchés parmi les solutions du problème d'optimisation

$$\mathcal{P} \left| \begin{array}{l} \text{extrema de } b(x,y,z) = \beta \dfrac{x^2y^2z^3}{C^6} \\ \text{s. c. } \; g(x,y,z) = x+y+z-C = 0 \end{array} \right.$$

pour lesquelles $x,\, y,\, z \geq 0$.

Comme b et g sont différentiables sur $\mathbb{R}^3$ (puisque ces fonctions sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^3$) et comme $\nabla g = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \neq \mathbf{0}$ sur $\mathtt{E}_4$, toute solution de $\mathcal{P}$ se trouve parmi les points stationnaires du Lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda) = b(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = \beta \frac{x^2y^2z^3}{C^6} - \lambda\,(x+y+z-C)$$

Ceux-ci vérifient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{2\beta}{C^6} xy^2z^3 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{2\beta}{C^6} x^2yz^3 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = \dfrac{3\beta}{C^6} x^2y^2z^2 - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -\,(x+y+z-C) = 0 \end{cases} \qquad (\spadesuit)$$

Égalant les valeurs de λ fournies par les deux premières équations, on a

$$\frac{2\beta}{C^6} xy^2z^3 = \frac{2\beta}{C^6} x^2yz^3$$

soit, en écartant les solutions déjà étudiées plus haut pour lesquelles $x = 0$, $y = 0$ ou $z = 0$,

$$x = y$$

En procédant de la même façon avec les première et troisième équations de ($\spadesuit$), on obtient

$$3x = 2z$$

En combinant ces deux relations avec la quatrième équation $x+y+z = C$, on trouve dès lors que le Lagrangien possède un seul point stationnaire pour lequel

$$(x_\star, y_\star, z_\star) = \left(\frac{2C}{7}, \frac{2C}{7}, \frac{3C}{7} \right)$$

Pour ces valeurs, on calcule

$$b(x_\star, y_\star, z_\star) = \frac{432\,\beta C}{7^7}$$

Cette valeur correspond au maximum absolu de b sur $\mathtt{E}$ puisque, en vertu des raisonnements précédents, on sait que le maximum existe et que la valeur de b calculée au point $(x_\star, y_\star, z_\star)$ est supérieure à la valeur de la fonction cible en tous les autres points rencontrant les conditions nécessaires d'extrémalité.