MATH0002 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Si $f_1 = o(x)$ et $f_2 = o\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$, peut-on affirmer que $f_1 + f_2 = o(x)$, $(x \to +\infty)$? Justifiez.

ii. Les fonctions $\sin x$, $\cos x$ et e^x sont-elles linéairement indépendantes sur $[-\pi, \pi]$? Justifiez.

iii. On dit d'une fonction f qu'elle est Lipschitzienne sur $\mathtt{E} \subset \mathbb{R}^n$ si

$$(\exists L \in \mathbb{R})(\forall \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathtt{E}) \; : \; |f(\mathsf{b}) - f(\mathsf{a})| \leq L|\mathsf{b} - \mathsf{a}|$$

(a) Montrez que si f est Lipschitzienne sur $\mathtt{E} \subset \mathbb{R}^2$, alors $f \in C_0(\mathtt{E})$.

(b) À l'inverse, par application du théorème des accroissements finis, montrez que si f est réelle et continûment dérivable sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ contenant le compact $\mathtt{K} = [0,1] \times [0,1]$, alors f est Lipschitzienne sur $\mathtt{K}$.

iv. Exprimez en français l'égalité

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{f}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \nabla \phi$$

puis démontrez cette formule. Quelles hypothèses sur $\mathbf{f}$ et ϕ sont nécessaires pour cette démonstration ?

Question II

On essaie de résoudre de façon approchée l'équation

$$\operatorname{th} x = 1 - x \qquad (\dagger)$$

i. En raisonnant graphiquement, montrez que l'équation $(\dagger)$ possède une solution unique comprise dans l'intervalle $]0,1[$.

ii. Justifiez théoriquement l'application de la formule de MacLaurin à l'ordre 2 à la fonction th. Pour quelles valeurs de x cette formule est-elle applicable ?

iii. Déterminez $\mathcal{P}_2(x)$, le polynôme de MacLaurin de degré 2 approchant $\operatorname{th} x$, et la solution approchée de $(\dagger)$ obtenue en remplaçant $\operatorname{th} x$ par $\mathcal{P}_2(x)$ dans cette équation.

iv. Déterminez une expression de l'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ associée au polynôme $\mathcal{P}_2(x)$.

v. Sur base des résultats ci-dessus, déterminez une valeur approchée de $\operatorname{th}(1/2)$ et montrez que, en valeur absolue, l'erreur correspondante est inférieure à $1/12$. Justifiez.

Remarque 1 : On pourra utiliser le fait que $\operatorname{ch}(1/2) < \sqrt{3/2}$.
Remarque 2 : En fonction de l'approche, on pourra aboutir à une erreur inférieure à $1/24$.

Tournez la page.

Question III

Résolvez le problème différentiel

$$\begin{cases} x''(t) + 2\omega x'(t) + \omega^2 x(t) = \omega^2 Y(1 + \omega t\, \mathrm{e}^{-\omega t}) \\ \\ x(0) = Y,\ x(1/\omega) = Y \end{cases}$$

où Y et ω sont des constantes (avec $\omega \neq 0$).

Question IV

On considère le problème

$$\mathcal{P} \left| \begin{array}{l} \displaystyle\min_{(x,y,z)\in \mathtt{E}} \quad 2z(y-1) + x^2 \\ \quad \text{où } \mathtt{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \end{array} \right.$$

i. Représentez graphiquement l'ensemble $\mathtt{E}$.

ii. Justifiez théoriquement l'existence d'une solution à ce problème.

iii. Déterminez la solution du problème $\mathcal{P}$. Justifiez.

SOLUTION TYPE

Question I

i. L'énoncé est vrai.

Les hypothèses sur f_1 et f_2 peuvent se traduire par

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{1/x} = 0$$

Dès lors, puisque les différentes limites existent et sont finies, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)+f_2(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} \\
&= 0 + \lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x^2\, 1/x} \\
&= \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\right) \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{1/x}\right) = 0
\end{aligned}$$

et

$$f_1(x) + f_2(x) = o(x), \quad (x \to +\infty)$$

ii. Pour tester l'indépendance des fonctions $\sin x$, $\cos x$ et e^x, on considère le Wronskien

$$\mathsf{W}(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & e^x \\ \cos x & -\sin x & e^x \\ -\sin x & -\cos x & e^x \end{vmatrix}$$

Le calcul peut être mené en ajoutant la première ligne à la dernière, ce qui donne

$$\mathsf{W}(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & e^x \\ \cos x & -\sin x & e^x \\ 0 & 0 & 2e^x \end{vmatrix}$$

puis, en développant selon la dernière ligne,

$$\mathsf{W}(x) = 2e^x(-\sin^2 x - \cos^2 x) = -2e^x$$

Puisque le Wronskien n'est pas identiquement nul sur $[-\pi, \pi]$, les fonctions sont linéairement indépendantes sur cet intervalle.

De façon alternative, en faisant appel à la définition de l'indépendance linéaire, on sait que les fonctions considérées sont linéairement indépendantes sur $[-\pi, \pi]$ lorsque

$$C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 e^x = 0 \qquad \forall x \in [-\pi, \pi] \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

Or, en considérant la combinaison linéaire en particulier en $x = 0$, $x = \pi/2$ et $x = \pi$, on a

$$\begin{cases} C_2 + C_3 = 0 \\ C_1 + C_3 e^{\pi/2} = 0 \\ -C_2 + C_3 e^{\pi} = 0 \end{cases}$$

En considérant la première et la troisième équation, on trouve $C_2 = C_3 = 0$. Ensuite, de la deuxième équation, on déduit que $C_1 = 0$. Dès lors, les fonctions sont effectivement linéairement indépendantes sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

iii. (a) Si f est Lipschitzienne sur $\mathtt{E} \subset \mathbb{R}^2$, alors, pour tout $\mathsf{x}, \mathsf{x}_0 \in \mathtt{E}$, on a

$$|f(\mathsf{x}) - f(\mathsf{x}_0)| \leq L|\mathsf{x} - \mathsf{x}_0|$$

En prenant la limite des deux membres de cette inégalité, on obtient

$$\lim_{\mathsf{x}\to\mathsf{x}_0} |f(\mathsf{x}) - f(\mathsf{x}_0)| \leq L \lim_{\mathsf{x}\to\mathsf{x}_0} |\mathsf{x} - \mathsf{x}_0| = 0$$

de sorte que

$$\lim_{\mathsf{x}\to\mathsf{x}_0} |f(\mathsf{x}) - f(\mathsf{x}_0)| = 0$$

et

$$\lim_{\mathsf{x}\to\mathsf{x}_0} f(\mathsf{x}) = f(\mathsf{x}_0)$$

ce qui correspond à l'expression de la continuité de f en x_0. Dès lors, $f \in C_0(\mathtt{E})$.

(b) La fonction f étant réelle et dérivable sur un ouvert Ω contenant le compact $\mathtt{K} = [0,1] \times [0,1]$, elle vérifie les hypothèses des accroissements finis et, pour tout $\mathsf{a} = (a_1, a_2)$ et $\mathsf{b} = (b_1, b_2) \in \mathtt{K}$ on a

$$f(b_1, b_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi^{(1)})(b_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi^{(2)})(b_2 - a_2)$$

où $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$ sont des points (inconnus) de $\mathtt{K}$.

Puisque $f \in C_1(\mathtt{K})$, ses dérivées partielles sont continues sur le compact $\mathtt{K}$ et, par conséquence, sont majorées sur $\mathtt{K}$ par une constante C (qui peut être choisie identique pour les deux dérivées partielles). Dès lors,

$$\begin{aligned}
|f(b_1, b_2) - f(a_1, a_2)| &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi^{(1)})\right| \, |b_1 - a_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(\xi^{(2)})\right| \, |b_2 - a_2| \\
&\leq C \left(|b_1 - a_1| + |b_2 - a_2|\right) \\
&\leq 2C \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \leq L \, |\mathsf{b} - \mathsf{a}|
\end{aligned}$$

avec $L = 2C$. La fonction f est donc Lipschitzienne sur $\mathtt{K}$.

iv. La relation

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{f}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \nabla \phi$$

exprime que la divergence du produit du champ scalaire ϕ et du champ vectoriel $\mathbf{f}$ est égale à la somme, d'une part, du produit de ϕ et de la divergence de $\mathbf{f}$ et, d'autre part, du produit scalaire de $\mathbf{f}$ avec le gradient de ϕ.

Si $\mathbf{f} = f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y + f_z \mathbf{e}_z$, il vient successivement, en exploitant les définitions de la divergence et du gradient,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\phi \mathbf{f}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\phi f_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi f_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi f_z) \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial x} f_x + \phi \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} f_y + \phi \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} f_z + \phi \frac{\partial f_z}{\partial z} \\
&= \phi \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \right) + \left(f_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + f_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + f_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\
&= \phi \nabla \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \nabla \phi
\end{aligned}$$

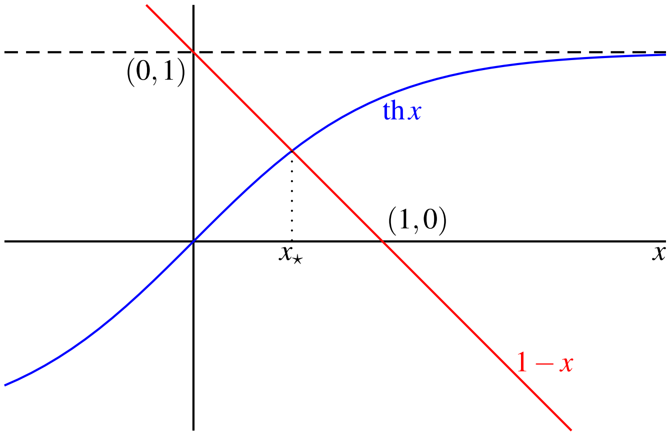
Ces développements se basent uniquement sur la dérivabilité des champs ϕ et $\mathbf{f}$.

Question II

i. Toute solution de l'équation

$$\operatorname{th} x = 1 - x$$

correspond à une intersection entre les graphiques des fonctions $f(x) = \operatorname{th} x$ et $g(x) = 1 - x$. Ces graphiques peuvent être aisément esquissés, en particulier en exploitant les propriétés connues de la fonction th. On a



Les graphiques se coupant en un seul point d'abscisse $x_\star \in]0,1[$, l'équation possède une solution unique située dans cet intervalle.

ii. La fonction $\operatorname{th} x$ est réelle et infiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. On peut donc lui appliquer la formule de MacLaurin à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}_0$, en particulier à l'ordre 2, en n'importe quel point $x \in \mathbb{R}$.

iii. L'application de la formule de MacLaurin d'ordre 2 à la fonction $f(x) = \operatorname{th} x$ conduit au polynôme

$$\mathcal{P}_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2$$

La première dérivée de la fonction $\operatorname{th} x$ est donnée par

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

Une seconde dérivation conduit à

$$f''(x) = -\frac{2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^4 x} = -2\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x}.$$

On calcule aisément

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 0$$

de sorte que $\operatorname{th} x$ peut être approchée par

$$\mathcal{P}_2(x) = 0 + 1 \cdot \frac{x}{1} + 0 \cdot \frac{x^2}{2} = x.$$

L'exploitation de cette approximation dans l'équation $\operatorname{th} x = 1 - x$ conduit à l'équation plus simple $x = 1 - x$, qui admet l'unique solution $x = 1/2$.

iv. L'erreur $\mathcal{R}_2(x)$ associée à l'approximation de $\operatorname{th} x$ par $\mathcal{P}_2(x)$ est donnée par

$$\mathcal{R}_2(x) = f'''(\xi)\,\frac{x^3}{3!}$$

où ξ est strictement compris entre 0 et x ou, de façon équivalente, $\xi = \vartheta x$ avec $\vartheta \in]0,1[$.
La troisième dérivée de la fonction $\operatorname{th} x$ étant obtenue par dérivation de

$$f''(x) = -2\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x},$$

on a successivement

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= -2\frac{\operatorname{ch} x\ \operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh} x\ (3\operatorname{ch}^2 x\ \operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch}^6 x}\\
&= -2\frac{\operatorname{ch}^2 x - 3\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^4 x}\\
&= -2\frac{\operatorname{ch}^2 x - 3(\operatorname{ch}^2 x - 1)}{\operatorname{ch}^4 x}\\
&= 2\ \frac{2\operatorname{ch}^2 x - 3}{\operatorname{ch}^4 x}
\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{2}{3!}\ \frac{2\operatorname{ch}^2\xi - 3}{\operatorname{ch}^4\xi}\ x^3.$$

v. Il découle des résultats qui précèdent que la valeur de $\operatorname{th}(1/2)$ peut être approchée par

$$\mathcal{P}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Cette approximation est entachée d'une erreur $\mathcal{R}_2(1/2)$ telle que décrite au point iv avec $\xi \in]0,1/2[$.
Puisque la fonction ch est strictement croissante sur $[0,1/2]$ et que, comme indiqué dans l'énoncé, $\operatorname{ch}(1/2) < \sqrt{3/2}$, on a

$$1 < \operatorname{ch}^2\xi < 3/2$$

et

$$-1 < 2\operatorname{ch}^2\xi - 3 < 0$$

Dès lors

$$\left|2\operatorname{ch}^2\xi - 3\right| < 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{|\operatorname{ch}^4 x|} < 1$$

Il en résulte que

$$\left|\mathcal{R}_2\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{2}{6} \times 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{24},$$

comme attendu.
NB : On peut obtenir une majoration moins précise de l'erreur en écrivant le reste sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_2(x) = \frac{2}{3!}\ \frac{2\operatorname{ch}^2\xi - 3}{\operatorname{ch}^4\xi}\ x^3 &= \frac{1}{3\operatorname{ch}^2\xi}\left(2 - \frac{3}{\operatorname{ch}^2\xi}\right)\ x^3\\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \operatorname{th}^2\xi\right)\left(3\operatorname{th}^2\xi - 1\right)\ x^3
\end{aligned}$$

et en remarquant que, puisque la fonction $\operatorname{th}^2\xi \in]0,1[$

$$(1 - \operatorname{th}^2\xi) \in]0,1[, \qquad (3\operatorname{th}^2\xi - 1) \in]-1,2[$$

de sorte que

$$\left|\mathcal{R}_2\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{3}\times 1\times 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{12}.$$

Cette approche, bien que moins précise, présente l'avantage d'éviter le recours à la majoration de $\operatorname{ch}(1/2)$ *donnée dans l'énoncé.*

Question III

L'équation

$$\begin{aligned} x''(t)+2\omega x'(t)+\omega^2 x(t) &= \omega^2 Y\left(1+\omega t\,\mathrm{e}^{-\omega t}\right)\\ &= \omega^2 Y+\omega^3 Y t\,\mathrm{e}^{-\omega t}\end{aligned}$$

est une équation différentielle linéaire à coefficients constants, d'ordre 2, non homogène.

Comme l'équation est linéaire et non homogène, sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation non homogène, soit

$$x(t) = x_h(t)+x_p(t)$$

Solution générale de l'équation homogène associée.

Comme l'équation est linéaire à coefficients constants, on peut trouver la solution générale de l'équation homogène en considérant les zéros du polynôme caractéristique

$$\mathcal{L}(z) = z^2+2\omega z+\omega^2 = (z+\omega)^2$$

Celui-ci admet le zéro $z=-\omega$ de multiplicité 2, qui conduit à la solution générale de l'équation homogène

$$x_h(t) = (C_1 t+C_2)\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

où C_1 et C_2 désignent des constantes.

Solution particulière de l'équation non homogène.

Comme l'équation est linéaire, le principe de superposition s'applique et on peut rechercher une solution particulière de l'équation non homogène de la forme

$$x_p(t) = x_{p_1}(t)+x_{p_2}(t)$$

où $x_{p_1}(t)$ et $x_{p_2}(t)$ sont respectivement des solutions particulières associées aux seconds membres

$$f_1(t)=\omega^2 Y \qquad \text{et} \qquad f_2(t)=\omega^3 Y t\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

- Une solution particulière relative à $f_1(t)$ s'identifie par simple inspection de l'équation, soit

$$x_{p_1}(t) = Y$$

- Afin d'identifer une solution particulière, $x_{p_2}(t)$, de l'équation

$$x''(t)+2\omega x'(t)+\omega^2 x(t) = \omega^3 Y t e^{-\omega t} \tag{$\heartsuit$}$$

on remarque que le second membre est de la forme exponentielle-polynôme $\mathcal{P}_p(t)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ où $\mathcal{P}_p(t) = \omega^3 Y t$ est un polynôme de degré 1 et $\lambda=-\omega$ est un zéro double de $\mathcal{L}(z)$. On peut donc rechercher une solution particulière du type

$$x_{p_2}(t) = (At+B)\,t^2\,\mathrm{e}^{-\omega t} = \left(At^3+Bt^2\right)\mathrm{e}^{-\omega t}$$

On calcule successivement

$$x'_{p_2}(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}\left[-\omega A t^3 + (3A - \omega B)t^2 + 2Bt\right]$$
$$x''_{p_2}(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}\left[\omega^2 A t^3 + (\omega^2 B - 6\omega A)t^2 + (6A - 4\omega B)t + 2B\right]$$

et, en substituant ces expressions dans (♡), on constate que A et B doivent être tels que

$$\mathrm{e}^{-\omega t}\left[\omega^2 A t^3 + (\omega^2 B - 6\omega A)t^2 + (6A - 4\omega B)t + 2B\right] + 2\omega\,\mathrm{e}^{-\omega t}\left[-\omega A t^3 + (3A - \omega B)t^2 + 2Bt\right] + \omega^2\left(At^3 + Bt^2\right)\mathrm{e}^{-\omega t} = \omega^3 Y t\,\mathrm{e}^{-\omega t}$$

Après simplification, il reste

$$6At + 2B = \omega^3 Y t$$

dont on déduit que

$$A = \frac{\omega^3 Y}{6} \qquad \text{et} \qquad B = 0$$

Dès lors, on obtient

$$x_{p_2}(t) = \frac{\omega^3 Y}{6}\, t^3\, \mathrm{e}^{-\omega t}$$

L'équation proposée possède donc la solution particulière

$$x_p(t) = x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t) = Y + \frac{\omega^3 Y}{6}\, t^3\, \mathrm{e}^{-\omega t}$$

Solution générale de l'équation non homogène.

La solution générale de l'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} x(t) &= (C_1 t + C_2)\,\mathrm{e}^{-\omega t} + Y + \frac{\omega^3 Y}{6}\, t^3\, \mathrm{e}^{-\omega t} \\ &= Y + \mathrm{e}^{-\omega t}\left(\frac{\omega^3 Y}{6}\, t^3 + C_1 t + C_2\right) \end{aligned}$$

Solution du problème différentiel.

Les constantes C_1 et C_2 peuvent être déterminées grâce aux conditions aux limites du problème, soit

$$\begin{cases} Y = x(0) = Y + C_2 \\ Y = x(1/\omega) = Y + \mathrm{e}^{-1}\left(\dfrac{Y}{6} + \dfrac{C_1}{\omega} + C_2\right) \end{cases}$$

On en tire aisément

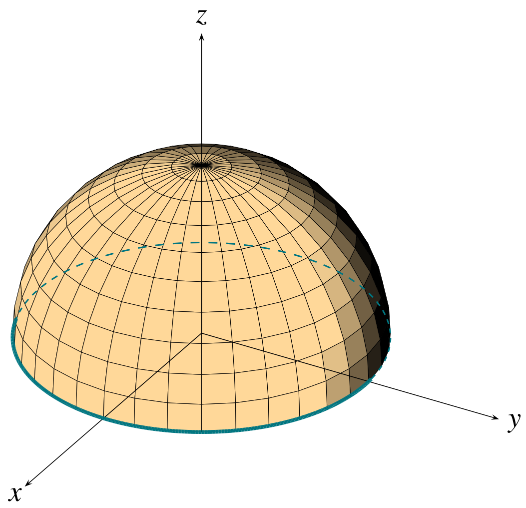
$$C_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad C_1 = -\frac{\omega Y}{6}$$

de sorte que la solution du problème posé s'écrit

$$x(t) = Y + \frac{\omega t\, Y}{6}\,\mathrm{e}^{-\omega t}\left(\omega^2 t^2 - 1\right)$$

Question IV

i. L'ensemble $\mathtt{E}$ correspond à la demi-boule de rayon 1 centrée à l'origine et située au-dessus du plan XY, soit



ii. Comme la fonction

$$f(x,y,z) = 2z(y-1) + x^2$$

est continue sur le compact $\mathtt{E}$, elle y atteint nécessairement son minimum (et également son maximum), ce qui assure l'existence d'une solution au problème considéré.

iii. La fonction f à minimiser est infiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}^3$, donc sur $\mathtt{E}$. Dès lors, le minimum recherché se trouve soit parmi les points stationnaires de f situés à l'intérieur de $\mathtt{E}$, soit parmi les points situés sur la frontière de $\mathtt{E}$.

a) Étude des points stationnaires de f.

Les points stationnaires de f vérifient

$$\nabla f = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2z = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2(y-1) = 0 \end{cases}$$

Le seul point stationnaire est $(0,1,0) = \mathrm{x}_1$ et celui-ci appartient à la frontière : le minimum recherché n'appartient donc pas à l'intérieur de $\mathtt{E}$, mais bien à la frontière.

On note que $f(\mathrm{x}_1) = 0$.

b) Étude des points de la frontière de $\mathtt{E}$.

La frontière de $\mathtt{E}$ est constituée du disque

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 0,\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

et de la surface sphérique

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z \geq 0,\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

(a) *Étude des points du disque.*

Sur le disque $\mathcal{D}$, $z = 0$ et la fonction s'écrit

$$f(x,y,0) = x^2 \geq 0$$

Le minimum de f sur $\mathcal{D}$ est donc égal à 0 et est atteint en tous les points de la forme $(0,y,0)$ où $y \in [-1,1]$ (et en particulier au point stationnaire $\mathrm{x}_1 = (0,1,0)$ identifié plus haut).

(b) *Étude des points de la surface $\mathcal{S}$.*

Le minimum de f sur la surface $\mathcal{S}$ peut être recherché parmi les solutions du problème d'optimisation

$$\mathcal{P}' \left| \begin{array}{l} \text{min. de } f(x,y,z) = 2z(y-1) + x^2 \\ \\ \text{s. c. } g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

pour lesquelles $z \geq 0$.

Comme f et g sont différentiables sur $\mathbb{R}^3$ (puisque ces fonctions sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^3$) et comme $\nabla g = (2x, 2y, 2z) \neq (0,0,0)$ sur $\mathcal{S}$, toute solution de $\mathcal{P}'$ se trouve parmi les points stationnaires du lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = 2z(y-1) + x^2 - \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right)$$

Ceux-ci vérifient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2x\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2z - 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2(y-1) - 2\lambda z = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) = 0 \end{cases} \tag{$\spadesuit$}$$

La première équation est vérifiée si $x = 0$ ou $\lambda = 1$.

- Le cas $\lambda = 1$ doit être écarté. En effet, les deuxième et troisième équations s'écrivent dans ce cas sous la forme

$$\begin{cases} z = y \\ \\ z = y - 1 \end{cases}$$

  Ce système est incompatible ; il ne possède pas de solution.

- Si $x = 0$, les deuxième et troisième équations de ($\spadesuit$) conduisent à

$$\begin{cases} z = \lambda y \\ \\ (1-\lambda^2)y = 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{1}{1-\lambda^2} \\ z = \dfrac{\lambda}{1-\lambda^2} \end{cases}$$

  En substituant ces résultats dans l'expression de la contrainte, il vient

$$\left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2 - 1 = 0$$

  soit

$$0 = 1 + \lambda^2 - 1 - \lambda^4 + 2\lambda^2 = \lambda^2(3 - \lambda^2)$$

  On identifie donc les solutions (x,y,z,λ) de ($\spadesuit$)

$$\left\{(0,1,0,0), \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3}\right), \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)\right\}$$

La première solution appartient à $\mathcal{D}$ et a déjà été examinée plus haut. La troisième correspond à un point situé sous le plan XY et doit donc être rejetée. Quant à la deuxième, elle correspond au point

$$\mathsf{x}_2 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{où} \quad f(\mathsf{x}_2) = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right) + 0 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$$

Puisque le problème de la recherche du minimum de f sur $\mathtt{E}$ possède une solution (cf. ii) et que, parmi tous les points où le minimum peut être réalisé, la fonction présente la plus petite valeur en x_2, on en déduit que celui-ci correspond à la solution du problème envisagé.