Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2019

MATH0002-4 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Définissez $C_1([a,b])$.

ii. Sachant que $\mathcal{L}(D)\left[e^{\lambda x} f(x)\right] = e^{\lambda x}\mathcal{L}(D+\lambda) f(x)$ pour tout opérateur différentiel linéaire $\mathcal{L}(D)$ et toute fonction f suffisamment dérivable, évaluez

$$(D-\lambda)^n \left[\mathcal{P}_n(x)\, e^{\lambda x}\right] \qquad \text{où} \quad \mathcal{P}_n(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

iii. Définissez mathématiquement le concept de changement de variables régulier d'ordre 3 entre deux ouverts Ω et Ω' de $\mathbb{R}^2$.

iv. Exprimez en français l'égalité

$$\nabla \wedge (\phi\, \mathbf{f}) = \nabla\phi \wedge \mathbf{f} + \phi\, \nabla \wedge \mathbf{f}$$

(où ϕ et $\mathbf{f}$ désignent des champs scalaire et vectoriel définis sur $\mathbb{R}^3$) et démontrez cette formule. Sous quelle(s) hypothèse(s) sur ϕ et $\mathbf{f}$ cette démonstration est-elle valable ?

Question II

Si on tient compte de la tension superficielle, la vitesse de propagation c des ondes à la surface de l'eau est décrite par

$$c = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}\right) \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda}}$$

où λ est la longueur d'onde, g est l'accélération de la pesanteur, σ est la tension superficielle et H est la profondeur.

i. Déterminez un comportement asymptotique de c pour des grandes longueurs d'onde, *i.e.* pour $\lambda \to +\infty$, et montrez que, en bonne approximation, la vitesse des ondes de grandes longueurs d'ondes est indépendante de λ (De telles ondes sont dites non dispersives.).

ii. Déterminez un comportement asymptotique de c pour des petites longueurs d'onde, *i.e.* pour $\lambda \to 0^+$.

iii. On note c_0 la vitesse de propagation obtenue en négligeant la tension superficielle du fluide, *i.e.* pour $\sigma = 0$. Pour des longueurs d'onde λ quelconques, déterminez les coefficients α et β tels que

$$c(\sigma) = c_0\left[1 + \alpha\,\sigma + \beta\,\sigma^2\right] + O(\sigma^3), \qquad (\sigma \to 0)$$

Tournez la page.

Question III

Les équations décrivant les transformations successives de l'ammonium, NH_3, en nitrite, NO_2^-, puis en nitrate, NO_3^-, sont données par

$$NH_3 + \frac{3}{2}O_2 \longrightarrow NO_2^- + H^+ + H_2O$$

$$NO_2^- + \frac{1}{2}O_2 \longrightarrow NO_3^-$$

Ces réactions d'oxydation sont très largement catalyzées par l'action de bactéries.

Sauf lorsqu'elle est très faible, la concentration d'oxygène n'influence pas la vitesse de ces réactions. La cinétique est alors décrite par les équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{x} = -k_1 x \\ \dot{y} = k_1 x - k_2 y \\ \dot{z} = k_2 y \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes strictement positives associées respectivement à la première et à la seconde réaction d'oxydation et où on a noté $x(t) = [NH_3](t)$, $y(t) = [NO_2^-](t)$ et $z(t) = [NO_3^-](t)$. On supposera que k_1 et k_2 prennent des valeurs numériques différentes.

i. Déterminez l'évolution temporelle des concentrations en ammonium $x(t)$ et en nitrite $y(t)$ si, initialement, le système ne contient pas de nitrite ni de nitrate et si la concentration initiale en ammonium est de β moles par litre (avec $\beta \neq 0$).

ii. Dans les mêmes conditions qu'au point précédent, déterminez la concentration ultime en nitrate du système, *i.e.* $\lim_{t\to\infty} z(t)$.

Question IV

On considère une entreprise dont le volume $\mathcal{P}$ de la production (exprimé dans des unités adéquates) dépend de la masse salariale x, de la quantité des matières premières utilisées y et des investissements immobiliers z selon la loi

$$\mathcal{P}(x,y,z) = y\sqrt{xz}$$

Le coût c de ces ressources, exprimé en €, est quant à lui décrit par

$$c(x,y,z) = x + \beta y + \gamma z$$

où β et γ sont des constantes strictement positives.

i. Déterminez la masse salariale, la quantité de matières premières et les investissements permettant de maximiser la production pour un coût de 10^6 €. Justifiez.

ii. Déterminez la sensibilité du volume de la production maximale par rapport au coût total.

SOLUTION TYPE

QUESTION I

i. L'expression $C_1([a,b])$ désigne l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur $[a,b]$, *i.e.* l'ensemble des fonctions dérivables sur $[a,b]$ et dont la dérivée est continue sur cet intervalle.

ii. Appliquant la formule

$$\mathcal{L}(D)\left[\mathrm{e}^{\lambda x}\, f(x)\right] = \mathrm{e}^{\lambda x}\, \mathcal{L}(D+\lambda)\, f(x)$$

à l'opérateur différentiel $\mathcal{L}(D) = (D-\lambda)^n$ et à $f(x) = \mathcal{P}_n(x)$, on a, puisque $\mathcal{L}(D+\lambda) = D^n$,

$$(D-\lambda)^n \left[\mathcal{P}_n(x)\, \mathrm{e}^{\lambda x}\right] = \mathrm{e}^{\lambda x}\, D^n \mathcal{P}_n(x)$$

Or, si on dérive n fois le polynôme de degré n

$$P_n(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

on obtient

$$D^n P_n(x) = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

Dès lors

$$(D-\lambda)^n \left[\mathcal{P}_n(x)\, \mathrm{e}^{\lambda x}\right] = \mathrm{e}^{\lambda x}\, n!$$

iii. Les relations $x = x(\xi,\eta)$ et $y = y(\xi,\eta)$ définissent un changement de variables régulier d'ordre 3 entre les ouverts Ω et $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ si

- la relation est bijective, *i.e.* pour tout $(x,y) \in \Omega$, il existe un et un seul couple $(\xi,\eta) \in \Omega'$ tel que

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$$

- les relations sont 3 fois continûment dérivables sur Ω' et leur Jacobien ne s'annule en aucun point de Ω', *i.e.*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{sur} \quad \Omega'$$

iv. La relation

$$\nabla \wedge (\phi\, \mathbf{f}) = \nabla\phi \wedge \mathbf{f} + \phi\, \nabla \wedge \mathbf{f}$$

exprime que le rotationnel du produit du champ scalaire ϕ et du champ vectoriel $\mathbf{f}$ est égal à la somme du produit vectoriel du gradient de ϕ par $\mathbf{f}$ et du produit de ϕ par le rotationnel de $\mathbf{f}$.

Si on note (f_x, f_y, f_z) les composantes de $\mathbf{f}$ dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ orientée en sens direct, alors (notant $[\cdot]_x$ la première composante d'un champ vectoriel)

$$\begin{aligned}[\nabla \wedge (\phi\, \mathbf{f})]_x &= \frac{\partial}{\partial y}(\phi f_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi f_y) = \frac{\partial \phi}{\partial y} f_z - \frac{\partial \phi}{\partial z} f_y + \phi\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) \\ &= [\nabla\phi \wedge \mathbf{f}]_x + \phi\, [\nabla \wedge \mathbf{f}]_x\end{aligned}$$

puisque les composantes de $\nabla\phi$ sont données par $\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}, \dfrac{\partial \phi}{\partial y}, \dfrac{\partial \phi}{\partial z}\right)$.

De même,

$$[\nabla\wedge(\phi\,\mathbf{f})]_y = \frac{\partial}{\partial z}(\phi f_x) - \frac{\partial}{\partial x}(\phi f_z) = \frac{\partial\phi}{\partial z} f_x - \frac{\partial\phi}{\partial x} f_z + \phi\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)$$
$$= [\nabla\phi\wedge\mathbf{f}]_y + \phi\,[\nabla\wedge\mathbf{f}]_y$$

$$[\nabla\wedge(\phi\,\mathbf{f})]_z = \frac{\partial}{\partial x}(\phi f_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi f_x) = \frac{\partial\phi}{\partial x} f_y - \frac{\partial\phi}{\partial y} f_x + \phi\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$
$$= [\nabla\phi\wedge\mathbf{f}]_z + \phi\,[\nabla\wedge\mathbf{f}]_z$$

ce qui achève la démonstration.

Outre la définition des opérateurs vectoriels, la démonstration repose exclusivement sur la règle de dérivation du produit de deux fonctions. La seule hypothèse utilisée est donc celle de la dérivabilité de ϕ et de $\mathbf{f}$.

Question II

i. Puisque

$$\frac{1}{\lambda} = o(\lambda), \qquad (\lambda\to+\infty)$$

on a

$$c = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}\right)\operatorname{th}\frac{2\pi H}{\lambda}} \sim \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\operatorname{th}\frac{2\pi H}{\lambda}}, \quad (\lambda\to+\infty)$$

puisque le deuxième terme de la parenthèse peut être négligé par rapport au premier.

Ensuite, puisque

$$x = \frac{2\pi H}{\lambda} \to 0 \qquad \text{si} \qquad \lambda\to+\infty$$

et que

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \sim x\,, \quad (x\to 0)$$

il vient,

$$c \sim \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\frac{2\pi H}{\lambda}} = \sqrt{gH}, \quad (\lambda\to+\infty)$$

Ce comportement asymptotique montre que les ondes de grandes longueurs d'ondes ($\lambda\to+\infty$) se propagent toutes à la même vitesse $\sqrt{gH}$ indépendamment de leur longueur d'onde λ.

ii. Tenant compte de

$$\lambda = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \qquad (\lambda\to 0^+)$$

on a

$$\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}\right) \sim \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}, \quad (\lambda\to 0^+)$$

Ensuite, puisque

$$x = \frac{2\pi H}{\lambda} \to +\infty \qquad \text{si} \qquad \lambda\to 0^+$$

et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1$, on a également

$$\operatorname{th}\frac{2\pi H}{\lambda} \sim 1, \qquad (\lambda\to 0^+)$$

Il vient dès lors

$$c = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}\right) \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda}} \sim \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}, \quad (\lambda \to 0^+)$$

iii. La vitesse de propagation varie avec la tension superficielle selon

$$c(\sigma) = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}\right) \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda}}$$

La vitesse de propagation obtenue en négligeant la tension superficielle est donnée par

$$c_0 = c(0) = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda}}$$

Dès lors, $c(\sigma)$ peut s'écrire sous la forme

$$c(\sigma) = c_0 \sqrt{1 + \frac{4\pi^2\sigma}{\rho g \lambda^2}}$$

Considérons alors la fonction

$$f(\sigma) = \frac{c(\sigma)}{c_0} = \sqrt{1 + a\,\sigma} \qquad \text{avec} \quad a = \frac{4\pi^2}{\rho g \lambda^2} > 0$$

L'application de la formule de Taylor à l'ordre 2 à la fonction f au voisinage de $\sigma = 0$, voisinage dans lequel la fonction f est au moins C_3, donne

$$f(\sigma) = f(0) + f'(0)\sigma + \frac{1}{2} f''(0)\sigma^2 + O(\sigma^3), \quad (\sigma \to 0)$$

où $f(0) = \dfrac{c(0)}{c_0} = 1$ et où

$$f'(\sigma) = \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{1 + a\sigma}}, \qquad f'(0) = \frac{a}{2}$$

et

$$f''(\sigma) = -\frac{1}{4} \frac{a^2}{\sqrt{(1 + a\sigma)^3}}, \qquad f''(0) = -\frac{a^2}{4}$$

Dès lors,

$$f(\sigma) = 1 + \frac{a}{2}\,\sigma - \frac{a^2}{8}\,\sigma^2 + O(\sigma^3), \quad (\sigma \to 0)$$

et donc

$$c = c_0 \left(1 + \alpha\,\sigma + \beta\,\sigma^2\right) + O(\sigma^3), \qquad (\sigma \to 0)$$

avec

$$\alpha = \frac{a}{2} = \frac{2\pi^2}{\rho g \lambda^2} \qquad \text{et} \qquad \beta = -\frac{a^2}{8} = -2\left(\frac{\pi^2}{\rho g \lambda^2}\right)^2$$

Question III

i. On considère le problème différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -k_1 x \\ \dot{y} = k_1 x - k_2 y \\ \dot{z} = k_2 y \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} x(0) = \beta \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases} \tag{$\spadesuit$}$$

où les constantes k_1 et k_2 prennent des valeurs numériques distinctes et où les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont respectivement utilisées pour représenter les concentrations en ammonium, en nitrite et en nitrate.

La première des équations de ($\spadesuit$) est équivalente à

$$\dot{x} + k_1 x = 0 \tag{$\heartsuit$}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants et homogène, qui ne fait intervenir que la concentration en ammonium, $x(t)$.
L'équation peut être résolue en remarquant qu'elle est à variables séparables ou en considérant le polynôme caractéristique associé $z + k_1$, dont le seul zéro est $z = -k_1$ (évidemment de multiplicité 1). Ceci conduit à une solution générale de la forme

$$x(t) = C_1 \ \mathrm{e}^{-k_1 t}$$

La constante d'intégration C_1 peut être fixée pour satisfaire la condition initiale imposée. De $x(0) = \beta = C_1$, on déduit

$$x(t) = \beta\, \mathrm{e}^{-k_1 t} \tag{$\dagger$}$$

En reportant cette expression dans la deuxième équation du système ($\spadesuit$), on obtient

$$\dot{y} + k_2 y = k_1 \beta\, \mathrm{e}^{-k_1 t} \tag{$\diamondsuit$}$$

qui est à nouveau une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, mais cette fois non homogène et ne faisant intervenir que la concentration en nitrite, $y(t)$.
L'équation ($\diamondsuit$) étant linéaire, sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation complète.
L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $z + k_2 = 0$, qui admet l'unique solution $z = -k_2$, de multiplicité 1. Ceci conduit à la solution générale

$$y_h(t) = C_2 \ \mathrm{e}^{-k_2 t}$$

Le terme indépendant de l'équation non homogène étant une exponentielle dans laquelle le coefficient de t n'est pas un zéro du polynôme caractéristique, la méthode de l'exponentielle-polynôme conduit à rechercher une solution particulière de l'équation complète sous la forme

$$y_p(t) = A \ \mathrm{e}^{-k_1 t}$$

où le coefficient A doit être déterminé pour que y_p vérifie l'équation non homogène. En substituant dans celle-ci, on obtient

$$A\,(-k_1)\,\mathrm{e}^{-k_1 t} + k_2\, A\, \mathrm{e}^{-k_1 t} = k_1 \beta\, \mathrm{e}^{-k_1 t}$$

et

$$A = \frac{k_1}{k_2 - k_1} \beta$$

L'équation admet donc une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = \frac{k_1}{k_2 - k_1}\, \beta\, \mathrm{e}^{-k_1 t}$$

La solution générale de l'équation ($\diamondsuit$) s'écrit

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = C_2\ \mathrm{e}^{-k_2 t} + \frac{k_1}{k_2 - k_1}\, \beta\, \mathrm{e}^{-k_1 t}\,.$$

La condition initiale $y(0) = 0$ se traduit par

$$C_2 + \frac{k_1}{k_2 - k_1}\beta = 0 \qquad \text{soit} \qquad C_2 = \frac{-k_1}{k_2 - k_1}\beta$$

Dès lors, la concentration en nitrite varie selon

$$y(t) = \frac{-k_1}{k_2 - k_1}\, \beta\, \mathrm{e}^{-k_2 t} + \frac{k_1}{k_2 - k_1}\, \beta\, \mathrm{e}^{-k_1 t} = \frac{k_1}{k_2 - k_1}\, \beta \left(\mathrm{e}^{-k_1 t} - \mathrm{e}^{-k_2 t}\right) \tag{‡}$$

ii. La solution peut être obtenue en résolvant la troisième équation différentielle du système ($\spadesuit$) et en passant à la limite pour $t \to +\infty$.
De façon alternative, on peut procéder en remarquant que l'addition membre à membre des trois équations du système ($\spadesuit$) conduit à

$$\dot{x}(t) + \dot{y}(t) + \dot{z}(t) = 0$$

et, en primitivant, à l'intégrale première

$$x(t) + y(t) + z(t) = \text{constante}$$

La constante d'intégration peut être déterminée en utilisant les conditions initiales, *i.e.*

$$x(0) + y(0) + z(0) = \beta$$

D'autre part, les résultats (†) et (‡) conduisent à

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

Il en résulte que

$$\lim_{t \to \infty} z(t) = \beta$$

Question IV

i. Il s'agit de rechercher la maximum de la fonction

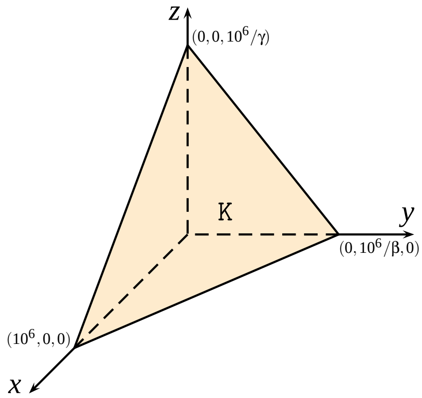
$$\mathcal{P}(x,y,z) = y\sqrt{xz}$$

sous la contrainte

$$c(x,y,z) = x + \beta y + \gamma z = 10^6$$

ainsi que les contraintes $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$ liées à la nature des variables.

Les contraintes définissent l'ensemble compact $\mathtt{K}$ des valeurs admissibles constitué de la portion de plan de sommets $(10^6, 0, 0)$, $(0, 10^6/\beta, 0)$ et $(0, 0, 10^6/\gamma)$.



La fonction $\mathcal{P}$ étant continue sur $\mathtt{K}$, elle réalise ses extrema sur ce compact. Le maximum ne peut être atteint pour $x = 0$, $y = 0$ ou $z = 0$ puisque la production $\mathcal{P}$ y est nulle alors qu'elle est strictement positive sur le reste de $\mathtt{K}$. La fonction $\mathcal{P}$ réalise son minimum en tous les points à l'intersection de $\mathtt{K}$ avec les plans de coordonnées. Le maximum recherché appartient au reste de $\mathtt{K}$.

Comme les fonctions $\mathcal{P}$ et c sont différentiables sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et que $\nabla c = \mathbf{e}_x + \beta \mathbf{e}_y + \gamma \mathbf{e}_z \neq \mathbf{0}$, on peut étudier le problème d'optimum avec contrainte d'égalité en considérant le Lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda) = y\sqrt{xz} - \lambda(x + \beta y + \gamma z - 10^6)$$

Le maximum se trouve parmi les points stationnaires du Lagrangien, *i.e.* les solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{yz}{2\sqrt{xz}} - \lambda = 0 \\ \sqrt{xz} - \lambda\beta = 0 \\ \dfrac{xy}{2\sqrt{xz}} - \lambda\gamma = 0 \\ x + \beta y + \gamma z - 10^6 = 0 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on déduit $\sqrt{xz} = \lambda\beta$, ce qui permet de mettre le système sous la forme

$$\begin{cases} yz = 2\lambda^2\beta \\ xz = \lambda^2\beta^2 \\ xy = 2\lambda^2\beta\gamma \\ x + \beta y + \gamma z = 10^6 \end{cases}$$

Les variables étant positives, on obtient, en divisant membre à membre les première et deuxième équations, d'une part, et les première et troisième équations, d'autre part,

$$y = \frac{2x}{\beta} \qquad \text{et} \qquad z = \frac{x}{\gamma}$$

En substiuant dans l'expression de la contrainte, il vient

$$x + \beta\,\frac{2x}{\beta} + \gamma\,\frac{x}{\gamma} = 10^6 \qquad \text{de sorte que} \qquad x = 25\cdot 10^4$$

On en déduit

$$y = \frac{50\cdot 10^4}{\beta} \qquad \text{et} \qquad z = \frac{25\cdot 10^4}{\gamma}$$

Puisque le maximum existe et que le Lagrangien ne possède qu'un seul point stationnaire

$$(x_\star, y_\star, z_\star) = \left(25\cdot 10^4, \frac{50\cdot 10^4}{\beta}, \frac{25\cdot 10^4}{\gamma}\right)$$

celui-ci correspond au maximum recherché. En ce point,

$$\mathcal{P}\left(25\cdot 10^4, \frac{50\cdot 10^4}{\beta}, \frac{25\cdot 10^4}{\gamma}\right) = \frac{125\cdot 10^9}{\beta\sqrt{\gamma}}$$

ii. Dans un problème d'optimisation avec contrainte d'égalité, le multiplicateur mesure la sensibilité de la fonction objectif à la valeur de la contrainte, *i.e.* si $(x_\star, y_\star, z_\star, \lambda_\star)$ est un point stationnaire du Lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda) = \mathcal{P}(x,y,z,) - \lambda\big[c(x,y,z) - \alpha\big]$$

relatif au problème

$$\left|\begin{array}{l} \max \mathcal{P}(x,y,z) \\ \text{s.c. } c(x,y,z) = \alpha \end{array}\right.$$

alors

$$\lambda_\star = \frac{d}{d\alpha}\mathcal{P}(x_\star, y_\star, z_\star)$$

Dès lors, pour obtenir la sensibilité du volume de la production maximale au coût total, il suffit de poursuivre la résolution entamée au point précédent en déterminant le multiplicateur de Lagrange. On calcule aisément

$$\frac{d}{d\alpha}\mathcal{P}(x_\star, y_\star, z_\star) = \lambda_\star = \frac{\sqrt{x_\star z_\star}}{\beta} = \frac{25\cdot 10^4}{\sqrt{\gamma}\,\beta}$$