Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2018

MATH0002-4 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
*Indiquez sur chacune de vos feuilles votre **numéro d'ordre**, votre nom de famille (en majuscules) et votre prénom.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Précisez comment se lit l'expression $f(x) = o[g(x)],\ (x \to x_0)$ et définissez mathématiquement le concept traduit par cette notation.

ii. En exploitant la formule de Taylor, déterminez une approximation du second ordre de la dérivée seconde d'une fonction T au point z_0 en vous appuyant sur des mesures ponctuelles de $T(z_0)$, $T(z_0+\Delta z)$ et $T(z_0-\Delta z)$, *i.e.* déterminez les coefficients α, β et γ tels que

$$T''(z_0) = \alpha T(z_0-\Delta z) + \beta T(z_0) + \gamma T(z_0+\Delta z) + O(\Delta z^2), \qquad (\Delta z \to 0)$$

Quelles hypothèses doit-on formuler sur T pour que cette expression soit valable ?

iii. Définissez mathématiquement le concept de Wronskien de solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2. Précisez le rapport entre le Wronskien et l'indépendance linéaire de ces solutions.

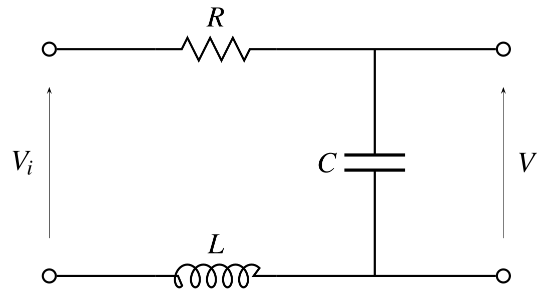
iv. Vérifiez la relation

$$\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = \mathbf{f}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{g}) + \mathbf{g}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{f}) + (\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g} + (\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}$$

dans le cas particulier où $\mathbf{f} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{g} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z$ où a, b et c sont des constantes.

Tournez la page.

Question II



Si on applique une différence de potentiel $V_i(t)$ aux bornes d'entrée du circuit électrique RLC ci-contre, les variations temporelles de la tension V aux bornes du condensateur sont décrites par l'équation différentielle

$$V'' + \frac{R}{L}V' + \frac{1}{LC}V = V_i(t)$$

i. Déterminez $V(t)$ dans le cas où $L = 2$ Henry, $R = 4$ Ohm, $C = 0.1$ Farad si $V_i(t) = E_0(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$ où $\tau = 1$ seconde et si $V(0) = 0$, $V'(0) = 0$.
   N.B. Aucune conversion d'unités ne doit être effectuée.

ii. Montrez que, quelles que soient les valeurs strictement positives des paramètres R, L et C et les conditions initiales, la tension V est asymptotique à un signal harmonique pour $t \to +\infty$ si une tension alternative $V_i(t) = E_0 \sin \omega t$ est appliquée aux bornes du système, *i.e.* que

$$V(t) \sim A \sin \omega t + B \cos \omega t, \qquad (t \to +\infty)$$

   où A et B sont des constantes.
   N.B. On ne demande pas de déterminer les valeurs des constantes A et B.

Question III

On considère les variations de la fonction $f(x,y,z) = xyz$ dans

$$\mathtt{E} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1 \right\}$$

où a, b et c sont des constantes réelles strictement positives.

i. Représentez graphiquement $\mathtt{E}$.

ii. Calculez $D_{\mathbf{e}}f$ au point $(x,y,z) = \frac{1}{6}(a,b,c)$ si $\mathbf{e} = \dfrac{a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

iii. Déterminez les valeurs maximales et minimales prises par la fonction f sur $\mathtt{E}$ ainsi que les points où ces extrema sont réalisés.

SOLUTION TYPE

Question I

i. La notation $f(x) = o[g(x)]$, $(x \to x_0)$ indique que f est *négligeable* par rapport à g au voisinage de x_0, c'est à dire que
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists V_\varepsilon(x_0))(\forall x \in V_\varepsilon(x_0)) : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \qquad (\ddagger)$$
S'il existe un voisinage de x_0 dans lequel g ne s'annule pas alors
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = o[g(x)], \ (x \to x_0)$$

ii. Par la formule de Taylor, on a
$$T(z) = T(z_0) + T'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}T''(z_0)(z - z_0)^2 + \frac{1}{6}T'''(z_0)(z - z_0)^3 + O\left([z - z_0]^4\right), \ (z \to z_0)$$
Posant $\Delta z = z - z_0$, on en tire
$$T(z_0 + \Delta z) = T(z_0) + T'(z_0)\Delta z + \frac{1}{2}T''(z_0)\Delta z^2 + \frac{1}{6}T'''(z_0)\Delta z^3 + O\left(\Delta z^4\right), \quad (\Delta z \to 0)$$
De même, on a
$$T(z_0 - \Delta z) = T(z_0) - T'(z_0)\Delta z + \frac{1}{2}T''(z_0)\Delta z^2 - \frac{1}{6}T'''(z_0)\Delta z^3 + O\left(\Delta z^4\right), \quad (\Delta z \to 0)$$
En additionnant membre à membre ces deux expressions, on obtient
$$T(z_0 + \Delta z) + T(z_0 - \Delta z) = 2T(z_0) + T''(z_0)\Delta z^2 + O\left(\Delta z^4\right), \quad (\Delta z \to 0)$$
Finalement,
$$T''(z_0) = \frac{1}{\Delta z^2}T(z_0 - \Delta z) - \frac{2}{\Delta z^2}T(z_0) + \frac{1}{\Delta z^2}T(z_0 + \Delta z) + O\left(\Delta z^2\right), \quad (\Delta z \to 0)$$
qui correspond au résultat annoncé pour
$$\alpha = \frac{1}{\Delta z^2}, \quad \beta = -\frac{2}{\Delta z^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\Delta z^2}$$
La validité de ce résultat est limitée par la validité de l'expression de la formule de Taylor ci-dessus. Il suffit donc que T soit quatre fois continûment dérivable au voisinage de z_0.

iii. Le Wronskien des solutions y_1 et y_2 d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 est défini par
$$\mathsf{W}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$
Si les solutions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes sur $\mathtt{I}$ alors leur Wronskien ne s'annule en aucun point de $\mathtt{I}$.
Inversement, si le Wronskien ne s'annule pas identiquement sur $\mathtt{I}$, alors les solutions sont linéairement indépendantes sur $\mathtt{I}$.

iv. Dans le cas où $\mathbf{f} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ et $\mathbf{g} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z$, on calcule aisément

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) &= \nabla(ax+by+cz) = \frac{\partial}{\partial x}(ax+by+cz)\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}(ax+by+cz)\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}(ax+by+cz)\mathbf{e}_z \\
&= a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z = \mathbf{g} \\
\nabla\wedge\mathbf{f} &= \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z \\
&= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z = \mathbf{0} \\
\nabla\wedge\mathbf{g} &= \mathbf{0} \quad \text{puisque } \mathbf{g} \text{ est constant} \\
(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g} &= \mathbf{0} \quad \text{puisque } \mathbf{g} \text{ est constant} \\
(\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f} &= \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z = \mathbf{g}
\end{aligned}$$

de sorte que l'égalité supposée

$$\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}) = \mathbf{f}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{g}) + \mathbf{g}\wedge(\nabla\wedge\mathbf{f}) + (\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g} + (\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}$$

s'écrit

$$\mathbf{g} = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{g}$$

et est bien vérifiée.

Question II

i. En remplaçant les différentes grandeurs par les valeurs fournies, l'équation différentielle devient

$$V'' + 2V' + 5V = E_0 - E_0\,\mathrm{e}^{-t}$$

soit

$$\mathcal{L}(D)V(t) = E_0 - E_0\,\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{où} \quad \mathcal{L}(D) = D^2 + 2D + 5$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, non homogène. Sa solution générale est donc la somme de la solution générale $V_h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $V_p(t)$ de l'équation non homogène.

L'équation homogène associée étant à coefficients constants, on détermine sa solution générale à l'aide de l'équation caractéristique $\mathcal{L}(z) = 0$, *i.e.*

$$z^2 + 2z + 5 = 0$$

dont les solutions sont

$$z_1 = -1 + 2i \qquad \text{et} \qquad z_2 = -1 - 2i$$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$V_h(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{(-1+2i)t} + \beta\,\mathrm{e}^{(-1-2i)t}$$

(α, β étant des constantes) que l'on peut écrire sous la forme réelle

$$V_h(t) = \mathrm{e}^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$$

où A et B sont des constantes réelles.

L'équation non homogène peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{L}(D)V = f_1 + f_2 \qquad \text{où} \qquad f_1(t) = E_0 \quad \text{et } f_2(t) = -E_0\,\mathrm{e}^{-t}$$

Comme l'équation est linéaire, le principe de superposition permet de chercher une solution particulière du type $V_1(t) + V_2(t)$ où V_1 et V_2 sont des solutions particulières des équations

$$\mathcal{L}(D)V_1 = f_1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}(D)V_2 = f_2$$

- Dans le premier cas, la fonction f_1 étant constante, on peut rechercher une solution du type $V_1(t) = C_1$ où C_1 est une constante. En injectant cette expression dans l'équation $\mathcal{L}(D)V_1 = f_1$, il vient

  $$5C_1 = E_0 \qquad \text{soit} \qquad C_1 = \frac{E_0}{5}$$

  Ceci conduit à la solution particulière

  $$V_1(t) = \frac{E_0}{5}$$

- Dans le deuxième cas, vu la forme de la fonction f_2, on recherche une solution du type $V_2(t) = C_2\,\mathrm{e}^{-t}$ où C_2 est une constante. Injectant cette expression dans l'équation $\mathcal{L}(D)V_2 = f_2$, il vient, puisque $V_2'(t) = -C_2\,\mathrm{e}^{-t}$ et $V_2''(t) = C_2\,\mathrm{e}^{-t}$,

  $$4C_2\,\mathrm{e}^{-t} = -E_0\,\mathrm{e}^{-t} \qquad \text{soit} \qquad C_2 = -\frac{E_0}{4}$$

  On identifie ainsi la solution particulière

  $$V_2(t) = -\frac{E_0}{4}\,\mathrm{e}^{-t}$$

La solution générale de l'équation est donc

$$V(t) = \mathrm{e}^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t) + \frac{E_0}{5} - \frac{E_0}{4}\,\mathrm{e}^{-t}$$

On peut alors déterminer les constantes à l'aide des conditions initiales. Comme

$$V'(t) = -\,\mathrm{e}^{-t}\,(A\cos 2t + B\sin 2t) + \mathrm{e}^{-t}\,(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t) + \frac{E_0}{4}\,\mathrm{e}^{-t}$$

les conditions $V(0) = 0$ et $V'(0) = 0$ conduisent à

$$\begin{cases} A + \dfrac{E_0}{5} - \dfrac{E_0}{4} = 0 \\ -A + \dfrac{E_0}{4} + 2B = 0 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{E_0}{20} \\ B = -\dfrac{E_0}{10} \end{cases}$$

La solution du problème différentiel est donc

$$V(t) = \frac{E_0}{20}\,\mathrm{e}^{-t}\,(\cos 2t - 2\sin 2t) + \frac{E_0}{5} - \frac{E_0}{4}\,\mathrm{e}^{-t}$$

ii. Dans cette nouvelle configuration, l'équation est

$$V'' + \frac{R}{L}V' + \frac{1}{LC}V = E_0\sin\omega t$$

Il s'agit encore d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, non homogène. Sa solution générale est donc la somme de la solution générale $V_h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $V_p(t)$ de l'équation non homogène.

On détermine la solution de l'équation homogène à l'aide de l'équation caractéristique $\mathcal{L}(z) = 0$, *i.e.*

$$z^2 + \frac{R}{L}z + \frac{1}{LC} = 0$$

dont les solutions dépendent de

$$\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC} = \frac{R^2C - 4L}{L^2C}$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles z_1 et z_2 dont le produit $1/LC$ est positif et la somme $-R/L$ négative de sorte que z_1 et z_2 sont négatives. Par conséquent, la solution générale de l'équation différentielle homogène

$$V_h(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{z_1 t} + \beta\,\mathrm{e}^{z_2 t}$$

  tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une solutions réelle double

$$z_1 = z_2 = -\frac{R}{2L} < 0$$

  Par conséquent, la solution générale de l'équation différentielle homogène

$$V_h(t) = (\alpha t + \beta)\,\mathrm{e}^{z_1 t}$$

  tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions z_1 et z_2 complexes conjuguées dont la partie réelle est négative puisque leurs somme $-R/L$ est négative. Par conséquent, la solution générale de l'équation différentielle homogène

$$V_h(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{z_1 t} + \beta\,\mathrm{e}^{z_2 t}$$

  tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Quelles que soient les valeurs des paramètres R, L et C, la solution générale de l'équation homogène tend donc vers zéro, *i.e.*

$$\lim_{t\to\infty} V_h(t) = 0 \qquad (\dagger)$$

Par ailleurs, vu la forme du second membre, on sait que l'équation non homogène admet une solution du type

$$V_p(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

puisque z_1 et z_2 diffèrent de $\pm i\omega$.

En synthèse, la solution générale de l'équation s'écrit

$$V(t) = V_h(t) + A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

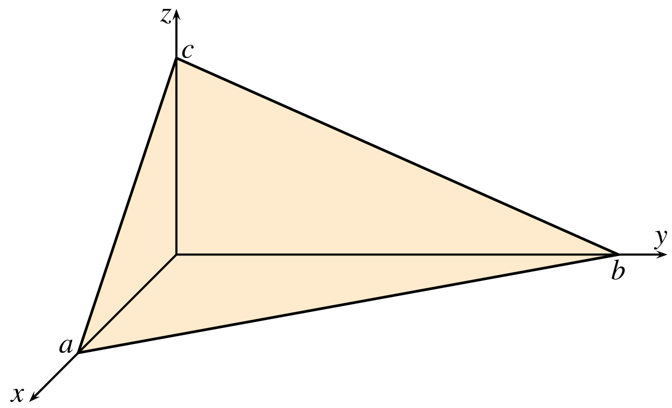
En vertu de (†), on a, comme annoncé,

$$V(t) \sim A\cos\omega t + B\sin\omega t, \qquad (t \to +\infty)$$

Question III

i. Le domaine E est un ensemble compact de $\mathbb{R}^3$ situé dans le sous-espace $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ et délimité par le plan d'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



ii. La dérivée directionnelle de la fonction

$$f(x,y,z) = xyz$$

dans la direction

$$\mathbf{e} = \frac{a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

est donnée par $D_{\mathbf{e}}f(x,y,z) = \mathbf{e} \cdot \nabla f(x,y,z)$ où

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e}_z = yz\mathbf{e}_x + xz\mathbf{e}_y + xy\mathbf{e}_z$$

On a donc

$$D_{\mathbf{e}}f(x,y,z) = \left(\frac{a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) \cdot (yz\mathbf{e}_x + xz\mathbf{e}_y + xy\mathbf{e}_z) = \frac{ayz + bxz + cxy}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

En évaluant cette dérivée au point $(a/6, b/6, c/6)$, on obtient

$$D_{\mathbf{e}}f(a/6, b/6, c/6) = \frac{abc}{12\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

iii. Remarquons tout d'abord que la fonction f est continue sur le compact E, ce qui garantit l'existence de valeurs minimale et maximale pour f sur E.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^3$. De plus, l'expression du gradient de f obtenue ci-dessus montre qu'il n'y a pas de point stationnaire à l'intérieur de E. Les extrema recherchés doivent donc appartenir à la frontière de E.

D'une part, la fonction est strictement positive sur $\mathring{E}$ et nulle sur les plans de coordonnées, c'est-à-dire quand x, y ou z est nul. Le minimum recherché y est donc réalisé et vaut $f = 0$.

D'autre part, le maximum recherché doit appartenir à la face inclinée de E.

Il faut donc rendre la fonction $f(x,y,z) = xyz$ maximale sous la contrainte

$$g(x,y,z) = 0 \qquad \text{où} \qquad g(x,y,z) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1$$

(et les contraintes $x, y, z \geq 0$).
Construisons le Lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z) = xyz - \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1\right)$$

Les fonctions f et g sont différentiables sur $\mathbb{R}^3$ et

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{e}_z = \frac{1}{a}\mathbf{e}_x + \frac{1}{b}\mathbf{e}_y + \frac{1}{c}\mathbf{e}_z \neq \mathbf{0}$$

Nous pouvons en conclure que les points qui rendent f maximale sous la contrainte considérée se trouvent parmi les points qui rendent le Lagrangien stationnaire, c'est-à-dire qui vérifient

$$\nabla L = 0$$

ou encore

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = yz - \dfrac{\lambda}{a} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = xz - \dfrac{\lambda}{b} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = xy - \dfrac{\lambda}{c} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} + 1 = 0 \end{cases}$$

Des trois premières équations, on tire

$$\lambda = ayz = bxz = cxy$$

soit $y = bx/a$ et $z = cx/a$ que l'on introduit dans la dernière équation qui devient alors

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{a} + \frac{x}{a} = 1$$

L'unique solution est donc

$$x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{b}{3}, \quad z = \frac{c}{3}$$

Puisque le Lagrangien n'admet qu'un seul point stationnaire, que le maximum existe et qu'il se trouve nécessairement parmi les points stationnaires de L, on en déduit que la valeur maximale prise par f sur $\mathtt{E}$ est obtenue au point $(a/3, b/3, c/3)$. En ce point, f prend la valeur $abc/27$.

De façon alternative, on peut rechercher le maximum en éliminant une variable au moyen de la contrainte. Par exemple, on a

$$g(x,y,z) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

et, en injectant dans l'expression de f, la fonction objectif prend la forme

$$\tilde{f}(x,y) = cxy\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

Cette fonction étant dérivable sur $\mathbb{R}^2$, le maximum recherché doit correspondre à un point stationnaire. Il peut donc être obtenu en résolvant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = cy\left(1 - \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) - \dfrac{c}{a}xy = 0 \\ \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = cx\left(1 - \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) - \dfrac{c}{b}xy = 0 \end{cases}$$

On obtient

$$x = \frac{a}{3} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{b}{3}$$

et, en substituant dans l'équation de la contrainte,

$$z = \frac{c}{3}$$

On vérifie aisément que le point ainsi identifié appartient à l'ensemble admissible $\mathtt{E}$. Le maximum recherché vaut $abc/27$.

On peut justifier le fait que le point stationnaire de $\tilde{f}$ correspond effectivement au maximum recherché par le fait que le maximum existe, qu'il doit correspondre à un point stationnaire de $\tilde{f}$ (puisqu'il ne peut appartenir ni à l'intérieur de $\mathtt{E}$ ni aux plans de coordonnées et que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^2$) et que $\tilde{f}$ ne possède qu'un seul point stationnaire.

De façon alternative, on peut également préciser la nature du point stationnaire en étudiant la matrice hessienne

$$\mathsf{H}(a/3, b/3) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(a/3,b/3)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2cy}{a} & c\left[1 - \dfrac{2x}{a} - \dfrac{2y}{b}\right] \\ c\left[1 - \dfrac{2x}{a} - \dfrac{2y}{b}\right] & -\dfrac{2cx}{b} \end{pmatrix}_{(a/3,b/3)}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{2bc}{3a} & -\dfrac{c}{3} \\ -\dfrac{c}{3} & -\dfrac{2ac}{3b} \end{pmatrix}$$

La matrice $(-\mathsf{H})$ est définie positive puisque (Sylvester)

$$\frac{2bc}{3a} > 0 \qquad \text{et} \qquad \det[-\mathsf{H}(a/3, b/3)] = \frac{c^2}{3} > 0$$

La matrice hessienne est donc définie négative au point considéré de sorte que celui-ci correspond à un maximum strict.