LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Août 2017

MATH0002-4 - Analyse Mathématique 1
Examen

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Si $f \sim g$ au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, peut-on en conclure que $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = 0$? Justifiez.

ii. Qu'est-ce que $C_1(\mathbb{R}^2)$?

iii. Si les fonctions $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ sont linéairement indépendantes sur $[a,b]$, peut-on en déduire l'indépendance linéaire des fonctions $xy_1(x), xy_2(x), \ldots, xy_n(x)$ sur le même intervalle ? Justifiez.

iv. Des propriétés de la fonction th, déduisez celles de la fonction arcth (domaine, ensemble des valeurs, continuité, dérivée).

v. Appliquez la formule de Taylor à l'ordre 1 à la fonction $f(x,y)$ au voisinage du point $(0,1)$. Quelles hypothèses la fonction f doit-elle vérifier ?

vi. Montrez que $\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) = 0$ où $\mathbf{f}$ désigne un champ vectoriel défini sur $\mathbb{R}^3$. Sous quelles conditions ce résultat est-il valable ?

Question II

On considère l'équation différentielle

$$y''(t) + 2\omega y'(t) + 2\omega^2 y(t) = \omega^2 \ell \sin \omega t$$

où ω et ℓ désignent des constantes réelles strictement positives.

i. En discutant s'il y a lieu en fonction de ω, résolvez l'équation différentielle assortie des conditions initiales $y(0) = \ell$ et $y'(0) = 0$.

ii. Montrez que, quelles que soient les conditions initiales, la solution de l'équation différentielle est asymptotique à une fonction oscillatoire de pulsation ω lorsque $t \to \infty$. Déterminez le déphasage de ces oscillations avec la fonction $\sin \omega t$ apparaissant dans le second membre de l'équation différentielle.

Question III

Dans les méthodes numériques d'optimisation dites “par région de confiance”, on approche itérativement le minimum d'une fonction-cible f par la résolution d'une suite de sous-problèmes simplifiés. Ces sous-problèmes impliquent typiquement la recherche du minimum d'une approximation quadratique $q(\mathrm{x})$ de $f(\mathrm{x})$ à l'intérieur d'un ensemble $\mathtt{E}(\rho)$ qui dépend du paramètre $\rho > 0$ appelé le rayon de confiance.

Dans le cadre d'un problème bi-dimensionnel de ce type, on considère

$$q(x,y) = 4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 4 \qquad \text{et} \qquad \mathtt{E}(\rho) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + \frac{y^2}{4} \leq \rho^2 \right\}$$

i. Déterminez toutes les valeurs de $\rho > 0$ pour lesquelles q admet un minimum local appartenant à l'intérieur de la région de confiance (*i.e.* pas à sa frontière).
Pour ces valeurs de ρ, justifiez pourquoi le minimum local est également le minimum absolu de q sur $\mathtt{E}(\rho)$.

ii. Déterminez le minimum absolu de q sur $\mathtt{E}(\rho)$ dans le cas où $\rho = 1$. Justifiez.

Question I

i. NON. Considérons les fonctions

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

On a effectivement

$$f \sim g, \qquad (x \to 0) \qquad \text{puisque} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(1+x) = 1$$

Par contre,

$$\lim_{x\to 0} \left[f(x) - g(x)\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

ii. On note $C_1(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}^2$, *i.e.* l'ensemble des fonctions de deux variables définies sur $\mathbb{R}^2$ et dont les deux dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

iii. Si les fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots y_n(x)$ sont linéairement indépendantes sur un intervalle $[a,b]$ tel que $0 \notin [a,b]$, alors

$$\lambda_1 x y_1(x) + \lambda_2 x y_2(x) + \cdots + \lambda_n x y_n(x) = 0 \qquad \forall x \in [a,b]$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \cdots + \lambda_n y_n(x) = 0 \qquad \forall x \in [a,b]$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Dès lors, les fonctions $xy_1(x)$, $xy_2(x)$, $\ldots xy_n(x)$ sont linéairement indépendantes sur l'intervalle $[a,b]$.

L'implication considérée n'est plus vraie si $0 \in [a,b]$, comme le montre le contre-exemple des fonctions

$$y_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad y_2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ces deux fonctions sont linéairement indépendantes sur $[-1,1]$, puisque l'une ne peut s'écrire comme un multiple de l'autre. Par contre, les fonctions $xy_1(x)$ et $xy_2(x)$ sont toutes deux égales à la fonction x^2 sur $[-1,1]$ et donc linéairement dépendantes sur ce même intervalle.

iv. La fonction th est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\frac{d}{dx} \operatorname{th} x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0$$

L'image de $\mathbb{R}$ par la fonction th est l'intervalle $]-1,1[$.

Par le théorème des fonctions réciproques, on en déduit que la fonction arcth est définie et indéfiniment continûment dérivable sur $]-1,1[$.

La dérivée de la fonction arcth est donnée par

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arcth} x = \frac{1}{\left.\frac{d}{dy} \operatorname{th} y\right|_{y=\operatorname{arcth} x}} = \operatorname{ch}^2(\operatorname{arcth} x) = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{arcth} x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

v. Si f est réelle et deux fois continûment dérivable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ tel que le segment joignant le point $(0,1)$ à $(\Delta x, 1+\Delta y)$ est entièrement compris dans Ω, alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(\Delta x, 1+\Delta y) = f(0,1) &+ \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \\ &+ \frac{1}{2}\Delta x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathrm{x}^\star) + \frac{1}{2}\Delta y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathrm{x}^\star) + \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathrm{x}^\star) \end{aligned}$$

où $\mathrm{x}^\star = (\theta\Delta x, 1+\theta\Delta y)$.

vi. Notant

$$\mathbf{f} = f_x\mathbf{e}_x + f_y\mathbf{e}_y + f_z\mathbf{e}_z$$

on calcule successivement

$$\nabla \wedge \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

et

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial^2 f_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 f_y}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 f_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 f_z}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 f_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 f_x}{\partial z\partial y}\\ &= 0\end{aligned}$$

à condition de tenir compte de l'égalité des dérivées croisées qui ne diffèrent que par l'ordre de dérivation, ce qui est le cas si $f \in C_2(R^3)$.

Question II

i. L'équation différentielle étant linéaire et non homogène, sa solution générale est la somme de la solution générale $y_h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $y_p(t)$ de l'équation non homogène.

Puisque l'équation homogène associée est à coefficients constants, on peut trouver sa solution générale à partir des racines de l'équation caractéristique

$$z^2 + 2\omega z + 2\omega^2 = 0$$

soit

$$z_{1,2} = \frac{-2\omega \pm \sqrt{4\omega^2 - 8\omega^2}}{2} = -\omega \pm i\omega$$

La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y_h(t) = C\,\mathrm{e}^{(-\omega+i\omega)t} + C'\,\mathrm{e}^{(-\omega-i\omega)t}$$

que l'on peut écrire sous forme réelle

$$y_h(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}\,(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t)$$

Étant donné la forme du deuxième membre de l'équation non homogène, nous allons chercher une solution particulière du type

$$y_p(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

Injectant cette expression dans l'équation différentielle à résoudre, il vient

$$\left(A\omega^2 - 2\omega^2 B\right)\sin\omega t + \left(2A\omega^2 + B\omega^2\right)\cos\omega t = \omega^2\ell\sin\omega t$$

En égalant les coefficients de $\sin\omega t$ et $\cos\omega t$, on est amené à considérer le système

$$\begin{cases} A - 2B = \ell \\ 2A + B = 0 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{\ell}{5} \\ B = -\dfrac{2\ell}{5} \end{cases}$$

Une solution particulière de l'équation non homogène est donc

$$y_p(t) = \frac{\ell}{5}\sin\omega t - \frac{2\ell}{5}\cos\omega t$$

Dès lors, la solution générale de l'équation non homogène s'écrit

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = \mathrm{e}^{-\omega t}\,(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) + \frac{\ell}{5}\sin\omega t - \frac{2\ell}{5}\cos\omega t$$

L'équation différentielle étant complétée par deux conditions initiales de Cauchy, le problème différentiel admet une solution unique. Comme

$$y'(t) = -\omega e^{-\omega t}\left(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t\right) + e^{-\omega t}\left(-\omega C_1 \sin\omega t + \omega C_2 \cos\omega t\right) + \frac{\omega\ell}{5}\cos\omega t + \frac{2\omega\ell}{5}\sin\omega t$$

on a

$$\begin{cases} y(0) = \ell = C_1 - \dfrac{2\ell}{5} \\ y'(0) = 0 = -\omega C_1 + \omega C_2 + \dfrac{\omega\ell}{5} \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} C_1 = \dfrac{7\ell}{5} \\ C_2 = \dfrac{6\ell}{5} \end{cases}$$

La solution du problème différentiel est donc

$$y(t) = \frac{\ell}{5} e^{-\omega t}\left(7\cos\omega t + 6\sin\omega t\right) + \frac{\ell}{5}\left(\sin\omega t - 2\cos\omega t\right)$$

ii. Quelles que soient les conditions initiales, la solution générale de l'équation différentielle est asymptotique à

$$y_\infty(t) = \frac{\ell}{5}\sin\omega t - \frac{2\ell}{5}\cos\omega t \qquad \text{pour} \qquad t \to +\infty$$

Cette fonction peut être décrite par une fonction harmonique unique en introduisant les paramètres $A > 0$ et φ tels que

$$y_\infty(t) = A\sin(\omega t - \varphi) = A\sin\omega t\cos\varphi - A\cos\omega t\sin\varphi$$

En identifiant les coefficients correspondants, il vient

$$\begin{cases} A\cos\varphi = \dfrac{\ell}{5} \\ A\sin\varphi = \dfrac{2\ell}{5} \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{\sqrt{5}}{5}\ell \\ \varphi = \operatorname{arctg} 2 \end{cases}$$

La solution est donc asymptotique à

$$y_\infty(t) = \frac{\sqrt{5}}{5}\ell\sin\left[\omega t - \operatorname{arctg} 2\right]$$

Elle présente des oscillations de même pulsation que la fonction $\sin\omega t$ apparaissant dans le membre de droite de l'équation mais présentant un déphasage de $\operatorname{arctg} 2$.

Question III

i. La fonction q définie par

$$q(x,y) = 4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 4$$

est infiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et ne peut donc présenter un minimum en un point intérieur à la région de confiance $\mathtt{E}(\rho)$ que si elle y est stationnaire.

Les points stationnaires de q sont obtenus en résolvant le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial x} = 8x - 8 = 0 \\ \dfrac{\partial q}{\partial y} = 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

qui conduit à $(x,y) = (1,-2)$.

Cet unique point stationnaire appartient à l'intérieur de la région de confiance $\mathtt{E}(\rho)$ si et seulement si $\rho > \sqrt{2}$.

Pour vérifier que ce point stationnaire correspond à un minimum local de la fonction q, on forme la matrice Hessienne. Celle-ci est donnée par

$$\mathsf{H}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 q}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est constante et définie positive.

La fonction q est donc strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ et son unique point stationnaire correspond à son minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$.

En particulier, le point $(1,-2)$ définit le minimum absolu de q sur $\mathtt{E}(\rho)$ pour toutes les valeurs de $\rho > \sqrt{2}$.

ii. Dans le cas où $\rho = 1$, l'unique point stationnaire de q est extérieur à la région de confiance $\mathtt{E}(\rho)$.

La fonction q étant continue sur $\mathbb{R}^2$ et le domaine $\mathtt{E}(\rho)$ étant compact (fermé et borné), pour tout $\rho > 0$, cette fonction doit toutefois réaliser un minimum absolu et un maximum absolu sur $\mathtt{E}(\rho)$ (le maximum n'est pas demandé).

Ce minimum et ce maximum sont à rechercher sur la frontière de $\mathtt{E}(\rho)$, à savoir, pour $\rho = 1$, parmi les points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient la contrainte

$$g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$$

Les fonctions q et g sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\nabla g(x,y) = 2x\,\mathbf{e}_x + \frac{y}{2}\,\mathbf{e}_y$$

ne s'annule pas sur la frontière de $\mathtt{E}(1)$.

Le minimum et le maximum de q sur la frontière de $\mathtt{E}(1)$ sont donc à rechercher parmi les points stationnaires du Lagrangien

$$\begin{aligned} L(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\, g(x,y) \\ &= 4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 4 + \lambda\left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire parmi les points qui vérifient le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 8x - 8 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + 4 + \dfrac{\lambda}{2}y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1 = 0 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre la première équation et le double de la deuxième équation de ce système, on est conduit, après factorisation, à

$$(4+\lambda)(2x+y) = 0$$

La solution $\lambda = -4$ étant incompatible avec les deux premières équations du système, on en déduit que $y = -2x$ puis, en injectant cette égalité dans la troisième équation du système, que $x^2 = 1/2$.

La recherche des points stationnaires du Lagrangien L conduit donc à la détermination des deux points

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$$

de la frontière de $\mathtt{E}(1)$.

En vertu de ce qui précède, un de ces points définit le minimum de q sur la frontière de $\mathtt{E}(1)$ et, plus globalement, sur $\mathtt{E}(1)$ (l'autre point définissant le maximum correspondant).

On identifie minimum et maximum en calculant la valeur de q en chacun de ces deux points :

$$q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right) = -8\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad q\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2}$$

de sorte que le minimum de q sur $\mathtt{E}(1)$ vaut $-8\sqrt{2}$ et est atteint en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$.