Août 2016

Université de Liège

Prof. Éric J.M.DELHEZ

MATH0002-4 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom, section et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Si $f \sim g \quad (x \to 0)$, peut-on en déduire que $f - g \sim 0 \quad (x \to 0)$. Justifiez.

ii. Énoncez la formule de Taylor permettant d'approcher une fonction f d'une seule variable au voisinage de $a = 1$ par un polynôme d'ordre 3. Précisez l'expression du reste et les hypothèses correspondantes.

iii. Si la fonction f est différentiable au voisinage du point $\mathtt{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, est-elle continue en ce point ? Justifiez.

iv. Montrez que si $\mathbf{f} \in C_1(\mathbb{R}^3)$ et si $\mathbf{a}$ désigne un vecteur constant alors $\nabla \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{f}) = -\mathbf{a} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f})$.

Question II

Déterminez la solution $x(t)$ du problème différentiel

$$\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = t\,\mathrm{e}^{-t} \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

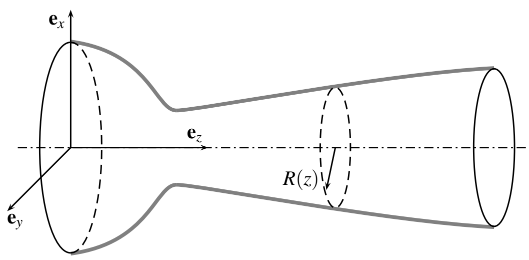
Question III

Une buse de Laval est une tuyère constituée d'un convergent puis d'un divergent permettant d'amener les gaz de combustion d'un moteur-fusée au régime supersonique. On considère une buse de Laval de longueur $\ell > 0$ présentant une symétrie de révolution d'axe OZ et une section circulaire de rayon variable $R(z)$ (où R est une fonction strictement positive connue).

Afin de faciliter l'étude de l'écoulement des gaz dans la tuyère, on introduit le changement de variables

$$\begin{cases} x = \xi\, R(\sigma) \cos\theta \\ y = \xi\, R(\sigma) \sin\theta \\ z = \sigma \end{cases}$$

en considérant uniquement les valeurs positives de ξ.



i. Déterminez l'image $\mathtt{E}'$ de l'intérieur

$$\mathtt{E} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in]0, \ell[,\ 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < R(z) \right\}$$

de la buse de Laval par ce changement de variables.

ii. Étudiez la régularité du changement de variables en précisant les sous-ensembles ouverts Ω et Ω' de $\mathtt{E}$ et $\mathtt{E}'$ entre lesquels les relations ci-dessus définissent un changement de variables régulier d'ordre 1. Quelle condition la fonction R doit-elle vérifier pour qu'il en soit ainsi ?

iii. Déterminez les expressions des opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}$$

en fonction des nouvelles variables.

Question I

i. Non, si $f \sim g$ au voisinage de 0, on ne peut en conclure que $f - g \sim 0$.
Pour le montrer, considérons les fonctions

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x} - 1$$

Les deux fonctions sont bien asymptotiques l'une à l'autre puisque

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - x} = 1$$

Cependant $f(x) - g(x) = 1$ n'est pas asymptotique à 0 puisque

$$\lim_{x \to 0} \frac{0}{f(x) - g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{1} = 0$$

ii. Si f est une fonction réelle, 3 fois continûment dérivable sur $[a, x]$ (resp. $[x, a]$) et 4 fois dérivable sur $]a, x[$ (resp. $]x, a[$), alors, il existe $\xi \in]a, x[$ (resp. $\xi \in]x, a[$) tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2} f''(a)(x - a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)(x - a)^3 + \mathcal{R}_3(x)$$

où

$$\mathcal{R}_3(x) = \frac{1}{4!} f''''(\xi)(x - a)^4$$

iii. Par définition, une fonction f est différentiable dans un voisinage $\mathcal{V}$ de $\mathsf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ si f est dérivable sur $\mathcal{V}$ et si

$$f(\mathsf{x}_0 + \mathsf{h}) - f(\mathsf{x}_0) = \sum_{i=1}^{3} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathsf{x}_0) + o(|\mathsf{h}|), \qquad (\mathsf{h} \to 0)$$

Dès lors

$$\begin{aligned} \lim_{\mathsf{h} \to 0} [f(\mathsf{x}_0 + \mathsf{h}) - f(\mathsf{x}_0)] &= \lim_{\mathsf{h} \to 0} \left[\sum_{i=1}^{3} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathsf{x}_0) + o(|\mathsf{h}|) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$\lim_{\mathsf{h} \to 0} f(\mathsf{x}_0 + \mathsf{h}) = f(\mathsf{x}_0)$$

ce qui exprime la continuité de f en x_0.

iv. Le produit vectoriel $\mathbf{a} \wedge \mathbf{f}$ peut être calculé formellement selon

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = (a_2 f_3 - a_3 f_2)\, \mathbf{e}_1 + (a_3 f_1 - a_1 f_3)\, \mathbf{e}_2 + (a_1 f_2 - a_2 f_1)\, \mathbf{e}_3$$

Il vient dès lors, tenant compte du fait que les composantes a_1, a_2 et a_3 de $\mathbf{a}$ sont constantes,

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\mathbf{a}\wedge\mathbf{f}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}(a_2f_3-a_3f_2)+\frac{\partial}{\partial x_2}(a_3f_1-a_1f_3)+\frac{\partial}{\partial x_3}(a_1f_2-a_2f_1)\\
&= \left(a_2\frac{\partial f_3}{\partial x_1}-a_3\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)+\left(a_3\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-a_1\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)+\left(a_1\frac{\partial f_2}{\partial x_3}-a_2\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right)\\
&= a_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right)+a_2\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right)+a_3\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)\\
&= -\mathbf{a}\cdot(\nabla\wedge\mathbf{f})
\end{aligned}
$$

puisque le rotationnel de **f** est donné par

$$
\nabla\wedge\mathbf{f}=\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1+\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3
$$

Question II

L'équation étant linéaire, sa solution générale peut s'exprimer comme la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

L'équation homogène étant linéaire à coefficients constants, la recherche de la solution générale de celle-ci peut être menée en considérant les zéros du polynôme caractéristique

$$
z^2+2z+5
$$

Le discriminant est $\Delta=-16$ et les zéros sont $-1+2i$ et $-1-2i$.

La solution générale de l'équation homogène est donc du type

$$
x(t)=C_1\,\mathrm{e}^{(-1+2i)t}+C_2\,\mathrm{e}^{(-1-2i)t}
$$

que l'on peut écrire sous forme réelle

$$
x(t)=A\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t+B\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t
$$

Étant donné la forme du deuxième membre de l'équation non homogène, on peut utiliser la méthode de l'exponentielle polynôme et rechercher une solution du type

$$
x_p(t)=(Ct+D)\,\mathrm{e}^{-t}
$$

On calcule successivement

$$
\begin{aligned}
x_p'(t)&=[C(1-t)-D]\,\mathrm{e}^{-t}\\
x_p''(t)&=[C(t-2)+D]\,\mathrm{e}^{-t}
\end{aligned}
$$

En substituant ces expressions dans l'équation différentielle à résoudre, on obtient

$$
4(D+Ct)\,\mathrm{e}^{-t}=t\,\mathrm{e}^{-t}
$$

soit, en identifiant les coefficients,

$$
C=\frac{1}{4}\qquad\text{et}\qquad D=0
$$

et

$$
x_p(t)=\frac{1}{4}t\,\mathrm{e}^{-t}
$$

La solution générale de l'équation non homogène est donc

$$
x(t)=x_h(t)+x_p(t)=A\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t+B\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t+\frac{1}{4}t\,\mathrm{e}^{-t}
$$

L'équation différentielle étant complétée par deux conditions initiales de Cauchy, le problème différentiel admet une solution unique. Comme

$$
x'(t)=(2B-A)\,\mathrm{e}^{-t}\cos 2t-(2A+B)\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t+\frac{1}{4}(1-t)\,\mathrm{e}^{-t}
$$

on a

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 2B - A + \dfrac{1}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = \dfrac{3}{8} \end{cases}$$

La solution du problème différentiel est donc

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos 2t + \frac{3}{8}\,\mathrm{e}^{-t}\sin 2t + \frac{1}{4}t\,\mathrm{e}^{-t}$$

Question III

i. Le changement de variables défini par les relations

$$\begin{cases} x = \xi\, R(\sigma)\cos\theta \\ y = \xi\, R(\sigma)\sin\theta \\ z = \sigma \end{cases} \qquad (\spadesuit)$$

est similaire au passage en coordonnées cylindriques dont le rayon r serait remplacé par $\xi R(\sigma)$. De $z \in]0,\ell[$, on déduit aisément que $\sigma \in]0,\ell[$. Ensuite, on détermine $\xi \geq 0$ pour que

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < R(z) \qquad \text{soit} \qquad \xi \in]0,1[$$

Considérant la périodicité des fonctions sin et cos et choisissant de travailler avec des valeurs de $\theta \in [0,2\pi[$, il vient

$$\mathtt{E}' = \{(\xi,\theta,\sigma) \in \mathbb{R}^3 : \sigma \in]0,\ell[,\ \xi \in]0,1[,\ \theta \in [0,2\pi[\}$$

Remarquons que le choix de faire varier θ dans l'intervalle $[0,2\pi[$ est arbitraire : tout autre intervalle de même longueur pourrait convenir.

ii. Pour que le changement de variables soit régulier d'ordre 1 sur un ouvert Ω, il faut

- que les relations qui le définissent introduisent une correspondance biunivoque entre Ω et un ouvert Ω'. Les ouverts Ω et Ω' doivent donc être définis de façon appropriée pour pouvoir inverser les relations ($\spadesuit$). On détermine aisément les relations inverses

$$\sigma = z \qquad \text{et} \qquad \xi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{R(z)}$$

Quant à la valeur de θ, elle est liées aux coordonnées cartésiennes par

$$\cos\theta = \frac{x}{\xi\, R(z)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{\xi\, R(z)} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

qui ne définissent la valeur de θ qu'à un multiple entier de 2π près et seulement si $x^2+y^2 \neq 0$.
Pour que le changement de variables soit régulier, on le considérera donc uniquement l'ouvert $\Omega' \subset \mathtt{E}'$ tel que

$$\Omega' = \{(\xi,\theta,\sigma) \in \mathbb{R}^3 : \sigma \in]0,\ell[, \xi \in]0,1[,\ \theta \in]0,2\pi[\}$$

auquel correspond l'ouvert

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in]0,\ell[, 0 < \sqrt{x^2+y^2} < R(z)\} \setminus \{(x,y,z) \in \mathtt{E} : y = 0, x > 0\}$$

- que les relations ($\spadesuit$) qui le définissent soient continûment dérivables sur les domaines considérés. On doit donc avoir $R \in C_1(]0,\ell[)$.

- que le Jacobien de la transformation soit non nul, *i.e.*

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\theta,\sigma)} = \begin{vmatrix} R(\sigma)\cos\theta & -\xi R(\sigma)\sin\theta & \xi R'(\sigma)\cos\theta \\ R(\sigma)\sin\theta & \xi R(\sigma)\cos\theta & \xi R'(\sigma)\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \xi R^2(\sigma) \neq 0 \quad \text{sur } \Omega'$$

Cette condition est satisfaite vu la définition de Ω'.

iii. Le théorème de dérivation des fonctions composées nous permet d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial z} = R(\sigma)\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + R(\sigma)\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} \tag{a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial z} = -R(\sigma)\xi\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + R(\sigma)\xi\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} \tag{b}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} = \frac{\partial x}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial z} = \xi\cos\theta\, R'(\sigma)\,\frac{\partial}{\partial x} + \xi\sin\theta\, R'(\sigma)\,\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \tag{c}$$

Combinant ces relations selon $\xi\cos\theta\cdot$(a) $-\sin\theta\cdot$(b), on obtient

$$\begin{aligned}
\xi\cos\theta\frac{\partial}{\partial\xi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} &= R(\sigma)\xi\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial x} + R(\sigma)\xi\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} \\
&\qquad + R(\sigma)\xi\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial x} - R(\sigma)\xi\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial y} \\
&= R(\sigma)\xi\frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned}$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\cos\theta}{R(\sigma)}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\sin\theta}{R(\sigma)\xi}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{d}$$

De même, évaluant $\xi\sin\theta\cdot$(a) $+\cos\theta\cdot$(b), on obtient

$$\begin{aligned}
\xi\sin\theta\frac{\partial}{\partial\xi} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} &= R(\sigma)\xi\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + R(\sigma)\xi\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial y} \\
&\qquad - R(\sigma)\xi\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + R(\sigma)\xi\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial y} \\
&= R(\sigma)\xi\frac{\partial}{\partial y}
\end{aligned}$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\sin\theta}{R(\sigma)}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\cos\theta}{R(\sigma)\xi}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{e}$$

Introduisant alors les résultats (d) et (e) dans (c), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} - \xi \cos\theta\, R'(\sigma)\, \frac{\partial}{\partial x} - \xi \sin\theta\, R'(\sigma)\, \frac{\partial}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} - \xi \cos\theta\, R'(\sigma)\, \left(\frac{\cos\theta}{R(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\sin\theta}{R\xi} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) - \xi \sin\theta\, R'(\sigma)\, \left(\frac{\sin\theta}{R(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\cos\theta}{R(\sigma)\xi} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\xi}{R(\sigma)}\, R'(\sigma)\, \frac{\partial}{\partial \xi}
\end{aligned}$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} &= \left(\frac{\cos\theta}{R(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\sin\theta}{R(\sigma)\xi} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{\xi}{R(\sigma)}\, R'(\sigma)\, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \\
&= \frac{\cos\theta}{R(\sigma)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \sigma} - \frac{\sin\theta}{R(\sigma)\xi} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \sigma} + \frac{\cos\theta}{R(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{\xi}{R(\sigma)}\, R'(\sigma)\, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) - \frac{\sin\theta}{R(\sigma)\xi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\xi}{R(\sigma)}\, R'(\sigma)\, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \\
&= \frac{\cos\theta}{R(\sigma)} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \sigma} - \frac{\sin\theta}{R(\sigma)\xi} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \sigma} - \frac{\cos\theta}{R^2(\sigma)}\, R'(\sigma)\, \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\xi \cos\theta}{R^2(\sigma)}\, R'(\sigma)\, \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\sin\theta}{R^2(\sigma)}\, R'(\sigma)\, \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \xi}
\end{aligned}$$