NOM : .... PRÉNOM : ....

NUMÉRO D'ORDRE : ....

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Mai 2021

MATH0002 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles et sur ce questionnaire votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le questionnaire avec vos copies.

Question I

A. On considère la fonction

$$f(x) = (1-x)\sin x$$

i. Justifiez théoriquement l'application de la formule de MacLaurin à l'ordre 3 à la fonction $f(x)$. Pour quelles valeurs de x cette formule est-elle applicable ?

ii. Établissez le polynôme de MacLaurin d'ordre trois $\mathcal{P}_3(x)$ approchant la fonction $f(x)$ au voisinage de l'origine ainsi que l'expression du reste $\mathcal{R}_3(x)$ correspondant.

iii. En exploitant $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{R}_3$, établissez une approximation de $f(0.1)$ et donnez une majoration de l'erreur associée.

B. i. On note $\mathcal{P}_n(x)$ le polynôme de degré n en $(x-a)$ obtenu par application de la formule de Taylor au voisinage de a à la fonction réelle $g \in C_\infty(\mathbb{R})$. Montrez que, si $\mathcal{P}_n$ n'est pas identiquement nul,

$$\mathcal{P}_{n+1}(x) - \mathcal{P}_n(x) = o(\mathcal{P}_n(x)), \quad (x \to a)$$

ii. Soit $\mathcal{P}_n(x)$, le polynôme en $(x-a)$ identifié ci-dessus. Pour ce polynôme, peut-on écrire

$$\mathcal{P}_{n+1}(x) - \mathcal{P}_n(x) = o(\mathcal{P}_n(x)), \quad (x \to b)$$

quel que soit le réel $b \neq a$?

Question II

A. Établissez la solution générale de l'équation différentielle

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln x + \mathrm{e}^{-2x}$$

B. Déterminez sur quel intervalle et éventuellement pour quelle(s) valeur(s) de $x_\star$ l'équation différentielle ci-dessus admet une solution unique (sans établir celle-ci) si on l'assortit de conditions auxiliaires dans les deux cas suivants. Justifiez.

i. $y(1) = 0, y'(1) = 0$

ii. $y(1) = 0, y(x_\star) = 0$

Tournez la page.

Question III

La dynamique d'un polluant radioactif transporté dans une rivière peut être décrite par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u\frac{\partial P}{\partial x} = -kP \tag{†}$$

où $P(t,x)$ désigne la concentration du polluant considéré, t est le temps et x la coordonnée longitudinale au fil de l'eau. Les constantes strictement positives u et k désignent respectivement la vitesse de l'écoulement et la constante de décroissance radioactive du polluant considéré.

Dans le but de résoudre cette équation, on introduit les nouvelles variables θ et η par les relations

$$\begin{cases} \theta = ut - \beta x \\ \\ \eta = \beta ut + x \end{cases} \tag{‡}$$

où β est un paramètre réel.

i. Étudiez la régularité sur $\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2\}$ du changement de variables défini par les relations (‡).

ii. Déterminez l'image des opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial}{\partial x}$ par le changement de variables.

iii. Montrez que, par un choix judicieux du paramètre β, l'équation (†) peut être transformée en une équation différentielle ne contenant plus que des dérivées de la fonction inconnue par rapport à la seule variable η. Sur cette base, établissez la forme la plus générale de la concentration du polluant en fonction de θ et η.

SOLUTION

Question I

A. i. La fonction $f(x) = (1-x)\sin x$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer la formule de MacLaurin (formule de Taylor au voisinage de $a = 0$) à l'ordre 3 pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.
En effet, la fonction vérifie alors les hypothèses de la formule de MacLaurin puisqu'elle est réelle, 3 fois continûment dérivable sur $[0,x]$ (ou $[x,0]$) et 4 fois dérivable sur $]0,x[$ (ou $]x,0[$).

ii. Le polynôme recherché s'écrit

$$\mathcal{P}_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

On calcule successivement

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x - x\sin x, & f(0) &= 0\\
f'(x) &= \cos x - \sin x - x\cos x, & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -\sin x - 2\cos x + x\sin x, & f''(0) &= -2\\
f'''(x) &= -\cos x + 3\sin x + x\cos x, & f'''(0) &= -1
\end{aligned}$$

de sorte que le polynôme de MacLaurin est

$$\mathcal{P}_3(x) = x - x^2 - \frac{x^3}{6}$$

L'erreur $\mathcal{R}_3(x)$ associée à l'approximation de $f(x)$ par $\mathcal{P}_3(x)$ est donnée par

$$\mathcal{R}_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4 \quad \text{où} \quad \xi \in]0,x[\text{ (ou }]x,0[)$$

La dérivation de l'expression de f''' obtenue plus haut conduit à

$$f^{(4)}(x) = \sin x + 4\cos x - x\sin x$$

de sorte que

$$\mathcal{R}_3(x) = (\sin\xi + 4\cos\xi - \xi\sin\xi)\frac{x^4}{4!} \quad \text{avec} \quad \xi \in]0,x[\text{ (ou }]x,0[)$$

iii. En exploitant $\mathcal{P}_3$ et $\mathcal{R}_3$, on obtient

$$f(0.1) \approx \mathcal{P}_3(0.1) = 0.1 - 0.01 - \frac{0.001}{6}$$

et

$$\mathcal{R}_3(0.1) = \Big((1-\xi)\sin\xi + 4\cos\xi\Big)\frac{10^{-4}}{4!} \quad \text{avec} \quad \xi \in]0, 0.1[$$

Puisque $0 < \xi < 0.1$, $0 < \sin\xi < \xi < 0.1$, $0 < (1-\xi)\sin\xi < 0.1$ et $\cos\xi < \cos 0 = 1$, on peut introduire la majoration

$$|\mathcal{R}_3(0.1)| < (0.1+4)\frac{10^{-4}}{4!} = \frac{41}{24}\,10^{-5}$$

de sorte que

$$|\mathcal{R}_3(0.1)| < 2\,10^{-5}$$

B. i. Le polynôme $\mathcal{P}_n(x)$ de degré n en $(x-a)$ obtenu par application de la formule de Taylor au voisinage de a à la fonction réelle $g \in C_\infty(\mathbb{R})$ s'écrit

$$\mathcal{P}_n(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

De même,

$$\mathcal{P}_{n+1}(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

de sorte que

$$\mathcal{P}_{n+1}(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Calculons

$$\lim_{x\to a} \frac{\mathcal{P}_{n+1}(x) - \mathcal{P}_n(x)}{\mathcal{P}_n(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}}{g(a) + g'(a)(x-a) + \dfrac{g''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \dfrac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n} = 0$$

Cette limite est nulle puisque le polynôme en $x-a$ du numérateur est de degré supérieur à celui du dénominateur et qu'il n'est pas possible que les coefficients $g(a)$, $g'(a)$, $\ldots$ du dénominateur soient tous nuls puisque $\mathcal{P}_n(x)$ n'est pas identiquement nul.
On en conclut que

$$\mathcal{P}_{n+1}(x) - \mathcal{P}_n(x) = o(\mathcal{P}_n(x)), \quad (x \to a)$$

ii. Non, on ne peut pas écrire

$$\mathcal{P}_{n+1}(x) - \mathcal{P}_n(x) = o(\mathcal{P}_n(x)), \quad (x \to b)$$

quel que soit le réel $b \neq a$.
Considérons la fonction $e^x \in C_\infty(\mathbb{R})$. Pour celle-ci, la formule de Taylor au voisinage de $a = 0$ s'écrit

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathcal{R}_n(x)$$

On a alors

$$\mathcal{P}_1(x) = 1 + x, \quad \mathcal{P}_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2(x) - \mathcal{P}_1(x) = \frac{x^2}{2}$$

ce qui donne, en considérant par exemple $b = 1 \neq 0$,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\mathcal{P}_2(x) - \mathcal{P}_1(x)}{\mathcal{P}_1(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2/2}{1+x} = \frac{1}{4}$$

de sorte que

$$\mathcal{P}_2(x) - \mathcal{P}_1(x) \neq o\left(\mathcal{P}_1(x)\right), \quad (x \to 1)$$

Question II

A. L'équation

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{-x} \ln x + \mathrm{e}^{-2x}$$

est une équation différentielle linéaire non homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Sa solution générale $y(x)$ est donc la somme de la solution générale $y_h(x)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $y_p(x)$ de l'équation non homogène.

Commençons par rechercher la solution générale de l'équation homogène

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

L'équation étant linéaire à coefficients constants, nous considérons le polynôme caractéristique associé $z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$ qui possède le zéro double $z = -1$. La solution générale s'écrit alors

$$y_h(x) = (Ax + B)\,\mathrm{e}^{-x}$$

où A et B sont des constantes.

Vu que l'équation est linéaire et que le second membre $\mathrm{e}^{-x} \ln x + \mathrm{e}^{-2x}$ est de la forme $f_1 + f_2$ avec $f_1(x) = \mathrm{e}^{-x} \ln x$ et $f_2(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, nous recherchons y_p sous la forme $y_{p_1} + y_{p_2}$ où y_{p_i} est solution de

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = f_i, \qquad i \in \{1,\ 2\} \tag{†}$$

- La méthode de variation des constantes permet de déterminer une solution particulière de l'équation

  $$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{-x} \ln x$$

  de la forme

  $$y_{p_1}(x) = \left(\int C_1(x)dx\right) y_1(x) + \left(\int C_2(x)dx\right) y_2(x)$$

  où $y_1(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ et $y_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$ constituent un système fondamental de solutions de l'équation homogène du deuxième ordre associée et où $C_1(x)$ et $C_2(x)$ vérifient

  $$\begin{cases} C_1\, y_1 + C_2\, y_2 = 0 \\ C_1\, y_1' + C_2\, y_2' = \mathrm{e}^{-x} \ln x \end{cases}$$

  soit, successivement,

  $$\begin{cases} C_1\, x\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \\ \\ C_1 (1-x)\,\mathrm{e}^{-x} - C_2\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \ln x \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} C_1\, x + C_2 = 0 \\ \\ C_1(1-x) - C_2 = \ln x \end{cases}$$

  La solution est donnée par

  $$\begin{cases} C_1(x) = \ln x \\ \\ C_2(x) = -x \ln x \end{cases}$$

  On calcule alors successivement les primitives

  $$\int C_1(x)\, dx = \int \ln x\, dx = x \ln x - x$$

  et

  $$\int C_2(x)\, dx = \int -x \ln x\, dx$$

qui peut être évaluée par parties

$$\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx$$

en considérant

$$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = -x \qquad g(x) = -\frac{x^2}{2}$$

de sorte que

$$\int -x\ln x\,dx = -\frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x}{2}\,dx = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}$$

On a donc

$$\begin{aligned} y_{p_1}(x) &= (x\ln x - x)\,x\,\mathrm{e}^{-x} + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x\right)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \frac{x^2}{4}(2\ln x - 3)\,\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

- La méthode de l'exponentielle-polynôme nous amène à rechercher une solution particulière de l'équation

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{-2x} \tag{1}$$

de la forme

$$y_{p_2}(x) = C\,\mathrm{e}^{-2x}$$

En substituant cette solution dans (1), on obtient

$$4C\,\mathrm{e}^{-2x} - 4C\,\mathrm{e}^{-2x} + C\,\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}$$

de sorte que $C = 1$ et

$$y_{p_2}(x) = \mathrm{e}^{-2x}$$

Finalement, la solution générale de l'équation différentielle s'exprime sous la forme

$$y(x) = (Ax + B)\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} + \frac{x^2}{4}(2\ln x - 3)\,\mathrm{e}^{-x}$$

B. i. Le théorème d'existence et unicité des solutions des équations différentielles linéaires assure l'existence d'une solution unique deux fois continument dérivable sur $\mathbb{R}_0^+$ puisque l'équation d'ordre 2 est linéaire, que les coefficients et le terme indépendant sont continus sur $\mathbb{R}_0^+$ et que l'équation est assortie de conditions de Cauchy $y(1) = 0$ et $y'(1) = 0$ en $x = 1 \in \mathbb{R}_0^+$.

ii. Les conditions auxiliaires $y(1) = 0$ et $y(x_*) = 0$ ne sont pas des conditions de Cauchy. Le théorème d'existence et unicité ne permet donc pas de justifier le caractère unique de la solution sur $\mathbb{R}_0^+$ où la solution générale obtenue existe. Par contre, on peut affirmer que la solution est unique si les conditions données permettent de fixer de façon unique les constantes A et B de la solution générale, c'est-à-dire si le système $y(1)=0$, $y(x_*)=0$ possède une solution unique. Ce système peut s'écrire

$$\begin{cases} A\,\mathrm{e}^{-1}+B\,\mathrm{e}^{-1}=-\,\mathrm{e}^{-2}+\dfrac{3}{4}\,\mathrm{e}^{-1}=C_1 \\ Ax_*\,\mathrm{e}^{-x_*}+B\,\mathrm{e}^{-x_*}=-\,\mathrm{e}^{-2x_*}-\dfrac{x_*^2}{4}(2\ln x_*-3)\,\mathrm{e}^{-x_*}=C_2 \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes, ou encore, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}^{-1} \\ x_*\,\mathrm{e}^{-x_*} & \mathrm{e}^{-x_*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Ce système a une solution unique si

$$\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e}^{-1} \\ x_*\,\mathrm{e}^{-x_*} & \mathrm{e}^{-x_*} \end{vmatrix}=\mathrm{e}^{-(x_*+1)}(1-x_*)\neq 0$$

c'est-à-dire si x_* appartenant à $\mathbb{R}_0^+$ est différent de 1.

Question III

i. Soit les relations

$$\begin{cases} \theta=ut-\beta x \\ \\ \eta=\beta ut+x \end{cases} \qquad (\diamondsuit)$$

Multipliant la première relation de $(\diamondsuit)$ par β et lui soustrayant la deuxième, on obtient

$$\beta\theta-\eta=-(1+\beta^2)x$$

Ajoutant à la première relation de $(\diamondsuit)$ le produit de la deuxième par β, on a

$$\theta+\beta\eta=(1+\beta^2)ut$$

de sorte que

$$\begin{cases} t=\dfrac{1/u}{1+\beta^2}\theta+\dfrac{\beta/u}{1+\beta^2}\eta \\ \\ x=\dfrac{-\beta}{1+\beta^2}\theta+\dfrac{1}{1+\beta^2}\eta \end{cases}$$

À tout $(t,x)\in\mathbb{R}^2$, correspond un couple unique $(\theta,\eta)\in\mathbb{R}^2$ et inversement. Les relations $(\diamondsuit)$ établissent donc une correspondance biunivoque entre les points $(t,x)\in\mathbb{R}^2$ et $(\theta,\eta)\in\mathbb{R}^2$. Les relations $(\diamondsuit)$ sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^2$ et telles que le Jacobien

$$J=\frac{\partial(\theta,\eta)}{\partial(t,x)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} & \dfrac{\partial\theta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial t} & \dfrac{\partial\eta}{\partial x} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u & -\beta \\ \beta u & 1 \end{vmatrix}=(1+\beta^2)u\neq 0$$

Dès lors, les relations définissent un changement de variables régulier d'ordre infini entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ quel que soit le paramètre $\beta\in\mathbb{R}$.

ii. À partir des relations ($\diamondsuit$), il vient directement

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} = u\frac{\partial}{\partial \theta} + \beta u\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = -\beta\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \eta}$$

iii. L'équation différentielle

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u\frac{\partial P}{\partial x} = -kP$$

s'écrit, en introduisant les dérivées partielles par rapport aux nouvelles variables,

$$u\frac{\partial P}{\partial \theta} + \beta u\frac{\partial P}{\partial \eta} + u\left(-\beta\frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial \eta}\right) = -kP$$

soit

$$u(1-\beta)\frac{\partial P}{\partial \theta} + u(1+\beta)\frac{\partial P}{\partial \eta} = -kP$$

En choisissant $\beta = 1$, l'équation devient

$$2u\frac{\partial P}{\partial \eta} = -kP$$

et ne fait plus intervenir qu'une dérivée partielle par rapport à η. Cette équation peut être traitée comme une équation à variables séparables

$$\frac{\partial P}{P} = -\frac{k}{2u}\,\partial\eta$$

de sorte que

$$\ln|P| = -\frac{k}{2u}\eta + f(\theta)$$

ou encore

$$P = g(\theta)\,\mathrm{e}^{-\frac{k}{2u}\eta}$$

où f et g sont des fonctions inconnues dépendant de la seule variable θ.