LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2019

MATH0002-4 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Si $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$, peut-on affirmer que $\lim\limits_{x\to x_0} \left[f(x) - g(x)\right] = 0$? Justifiez.

ii. Montrez que la dérivée première d'une fonction y peut être approchée par une différence finie selon

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + O(h^2), \qquad (h \to 0)$$

Sous quelle(s) hypothèse(s) ce résultat peut-il être établi ?

iii. Soit une fonction réelle $f \in C_2(\mathbb{R})$ telle que $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$. Si $f''(x_0) = 0$, peut-on en déduire que la dérivée seconde de f^{-1} (fonction réciproque de f) s'annule en $f(x_0)$? Justifiez.

iv. Les fonctions e^x, e^{-x} et $x\mathrm{e}^x$ sont-elles linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$? Justifiez.

v. Définissez le concept de fonction différentiable en un point x d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ où $n > 1$.

Question II

Résolvez le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = 0, \qquad y(1) = 0 \end{cases}$$

La solution est-elle unique ?

Tournez la page.

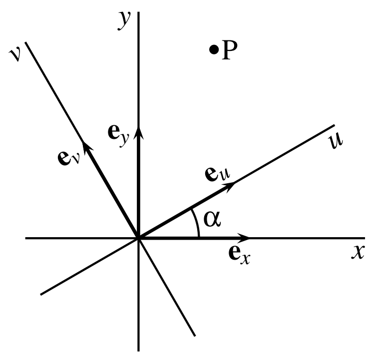
Question III

On désire installer une antenne émettrice devant assurer la transmission vers trois lieux de coordonnées $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ et $(0,0,c)$ où a, b et c sont des paramètres strictement positifs. Pour tenir compte de l'amortissement du signal, on décide de placer l'antenne en un point dont la somme des carrés des distances aux trois lieux à couvrir est minimale.

Déterminez la position optimale de l'antenne en sachant que celle-ci doit impérativement être placée à une distance inférieure ou égale à une constante $R > 0$ de la station de base située à l'origine des axes. Discutez s'il y a lieu en fonction des valeurs des paramètres du problème.

Question IV

On décrit le champ de température dans une plaque mince en utilisant deux systèmes de coordonnées cartésiennes (x,y) et (u,v) qui présentent une inclinaison α l'un par rapport à l'autre (voir figure).



i. Montrez que les coordonnées (x,y) et (u,v) d'un point P quelconque de la plaque sont liées par les relations

$$\begin{cases} u = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ v = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

ii. Étudiez la régularité du changement de variables.

iii. Déterminez l'image de l'opérateur Δ par le changement de variables.

iv. Montrez que l'opérateur vectoriel

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y}$$

prend une forme identique dans le système de coordonnées (u,v).

SOLUTION TYPE

Question I

i. NON. Pour s'en convaincre, on peut considérer le comportement des fonctions

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x} + 1$$

au voisinage de $x_0 = 0$.
D'une part, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

de sorte que $f \sim g$ pour $x \to 0$. Cependant,

$$\lim_{x\to 0} \left[f(x) - g(x)\right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x}+1\right)\right] = -1 \neq 0$$

ii. En appliquant la formule de Taylor, on obtient

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 + O(h^3) \tag{†}$$

et

$$y(x-h) = y(x) - y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 + O(h^3) \tag{‡}$$

Par différence, il vient

$$y(x+h) - y(x-h) = 2y'(x)h + O(h^3)$$

de sorte que, comme annoncé,

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

Ce raisonnement est limité par la validité de la formule de Taylor écrite sous la forme (†)-(‡). Il est donc au moins valable pour toute fonction y trois fois continûment dérivable au voisinage du point x considéré.

iii. Puisque $f \in C_2(\mathbb{R})$ et $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$ le théorème des fonctions réciproques permet d'affirmer que f possède une fonction réciproque f^{-1} qui est deux fois continûment dérivable sur l'image de $\mathbb{R}$ par f et telle que

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}$$

Dérivant cette relation par rapport à y, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{d^2f^{-1}}{dy^2}(y) &= \frac{-1}{(f'[f^{-1}(y)])^2}\frac{d}{dy}f'[f^{-1}(y)] \\
&= \frac{-1}{(f'[f^{-1}(y)])^2} f''[f^{-1}(y)]\frac{df^{-1}}{dy}(y) \\
&= \frac{-1}{(f'[f^{-1}(y)])^2} f''[f^{-1}(y)]\frac{1}{f'[f^{-1}(y)]} = \frac{-f''[f^{-1}(y)]}{(f'[f^{-1}(y)])^3}
\end{aligned}$$

soit, si $y = f(x_0)$ (et donc $x_0 = f^{-1}(y)$),

$$\frac{d^2 f^{-1}}{dy^2}[f(x_0)] = \frac{-f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3}$$

Dès lors, si $f''(x_0) = 0$, il vient

$$\frac{d^2 f^{-1}}{dy^2}[f(x_0)] = 0$$

iv. Les fonctions e^x, e^{-x} et $x\mathrm{e}^x$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$ si leur Wronskien ne s'annule pas identiquement sur cet intervalle. Or, on calcule aisément

$$\mathsf{W}(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} & x\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} & (1+x)\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} & (2+x)\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^x \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & (1+x) \\ 1 & 1 & (2+x) \end{vmatrix} = -4\mathrm{e}^x$$

Dès lors, les fonctions considérées sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

v. Une fonction f est dite différentiable au point x d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lorsque

(a) f est dérivable en x et

(b) $f(\mathsf{x}+\mathsf{h}) - f(\mathsf{x}) = \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathsf{x}) + o(|\mathsf{h}|), \qquad (\mathsf{h} \to 0)$

Question II

L'équation

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

est une équation différentielle linéaire non homogène. Sa solution générale $y(x)$ est donc la somme de la solution générale $y_h(x)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $y_p(x)$ de l'équation non homogène.

Commençons par rechercher la solution générale de l'équation homogène

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$$

L'équation étant linéaire à coefficients constants, nous considérons le polynôme caractéristique associé $z^2 + 2z + 1$ qui possède le zéro double $z = -1$. La solution générale s'écrit alors

$$y_h(x) = (Ax + B)\,\mathrm{e}^{-x}$$

où A et B sont des constantes.

La méthode de variation des constantes permet ensuite de déterminer une solution particulière de l'équation complète de la forme

$$y_p(x) = \left(\int C_1(x)dx\right) y_1(x) + \left(\int C_2(x)dx\right) y_2(x)$$

où $y_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ et $y_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$ constituent un système fondamental de solutions de l'équation homogène du deuxième ordre associée et où $C_1(x)$ et $C_2(x)$ vérifient

$$\begin{cases} C_1\, y_1 + C_2\, y_2 = 0 \\ C_1\, y_1' + C_2\, y_2' = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} C_1\, x\mathrm{e}^{-x} + C_2\ \mathrm{e}^{-x} = 0 \\ C_1\ \mathrm{e}^{-x}(1-x) - C_2\ \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \end{cases} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{cases} C_1\, x + C_2 = 0 \\ C_1(1-x) - C_2 = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

De là,

$$\begin{cases} C_1(x) = \dfrac{1}{x} \\ C_2(x) = -1 \end{cases}$$

On calcule alors successivement

$$\int C_1(x)\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x|$$

et

$$\int C_2(x)\, dx = \int -1\ dx = -x$$

Une solution particulière s'écrit donc

$$y_p(x) = \ln|x|\, x\ \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$$

Ceci permet d'exprimer la solution générale de l'équation différentielle sous la forme

$$y(x) = (Ax+B)\,\mathrm{e}^{-x} + \ln|x|\, x\ \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$$

Les conditions auxiliaires conduisent à

$$0 = y(1) = (A+B)\,\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-1}$$

et

$$0 = \lim_{x\to 0^+} y(x) = B$$

ce qui permet de fixer les constantes d'intégration selon $B = 0$ et $A = 1$.

La solution du problème sur l'intervalle $]0,+\infty[$ s'écrit donc

$$y(x) = x\ln x\ \mathrm{e}^{-x}$$

Comme le montre le raisonnement ci-dessus, et en particulier le fait que les conditions auxiliaires permettent de déterminer de façon unique les constantes d'intégration, la solution est unique sur $]0,+\infty[$. Par contre, il n'est pas possible de prolonger cette solution sur $\mathbb{R}$: la solution $y(x)$ déterminée ci-dessus n'est pas dérivable en $x = 0$ et l'équation différentielle elle-même n'a pas de sens en ce point.

Une solution de l'équation différentielle sur $]-\infty,0[$ peut être écrite sous la forme

$$(A_\star x + B_\star)\,\mathrm{e}^{-x} + \ln(-x)x\mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$$

où $A_\star$ et $B_\star$ sont des constantes d'intégration mais leur valeur ne peut être déterminée par les conditions auxiliaires. La solution n'est donc unique que sur $]0,+\infty[$.

Question III

Si l'antenne émettrice est placée en un point $\mathsf{x} = (x,y,z)$, la somme des carrés des distances aux trois stations est donnée par

$$\begin{aligned} f(\mathsf{x}) &= \left[(x-a)^2+y^2+z^2\right] + \left[x^2+(y-b)^2+z^2\right] + \left[x^2+y^2+(z-c)^2\right] \\ &= 2(x^2+y^2+z^2)+(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \end{aligned}$$

L'antenne devant être placée à une distance de l'origine inférieure ou égale à R, le problème peut être écrit sous la forme

$$\mathcal{P} \;\left|\; \min_{\mathsf{x}\in\mathsf{E}} f(\mathsf{x}) \right. \qquad \text{où} \quad \mathsf{E} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \le R^2\right\}$$

Notons que f réalise son minimum et son maximum sur E puisque $f \in C_0(\mathsf{E})$ où le domaine sphérique E est compact.

Dans un premier temps, recherchons le minimum de f dans l'intérieur $\mathring{\mathsf{E}}$ de E. Si f possède un minimum dans $\mathring{\mathsf{E}}$, celui-ci est atteint en un point stationnaire de f, *i.e.* en un point vérifiant la condition

$$\nabla f = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} 4x+2(x-a)=0 \\ 4y+2(y-b)=0 \\ 4z+2(z-c)=0 \end{cases}$$

Ce système possède l'unique solution

$$\mathsf{x}_\star = (a/3, b/3, c/3)$$

Ce point est un minimum local strict de f puisque la matrice hessienne

$$\mathsf{H}(\mathsf{x}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

est définie positive au point $\mathsf{x}_\star$.

Le point $\mathsf{x}_\star$ n'appartient cependant à E que si

$$\sqrt{x_\star^2+y_\star^2+z_\star^2} \le R$$

i.e. si

$$\frac{\ell}{3} \le R \qquad \text{où} \quad \ell = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \tag{†}$$

Ce n'est donc que sous cette condition que le point stationnaire $\mathsf{x}_\star$ constitue la solution du problème considéré.

Si la condition (†) n'est pas rencontrée, la fonction ne possède aucun extremum à l'intérieur de E et le minimum recherché se trouve sur la frontière $\partial\mathsf{E}$ du domaine admissible. Le problème prend alors la forme d'un problème d'optimisation avec contrainte d'égalité, soit

$$\mathcal{P}' \;\left|\; \begin{array}{l} \displaystyle\min_{\mathsf{x}\in\mathbb{R}^3} f(\mathsf{x}) \\ \text{s.c. } g(\mathsf{x}) = x^2+y^2+z^2-R^2 = 0 \end{array} \right.$$

Le problème peut être abordé en considérant le Lagrangien

$$\begin{aligned} L(\mathsf{x},\lambda) &= f(\mathsf{x}) - \lambda\, g(\mathsf{x}) \\ &= 2\left(x^2+y^2+z^2\right)+(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-\lambda\left(x^2+y^2+z^2-R^2\right) \end{aligned}$$

En effet, d'une part le problème $\mathcal{P}'$ implique l'optimisation d'une fonction continue sur un compact et possède donc une solution. De façon alternative, on peut justifier l'existence de cette solution en remarquant que le problème original $\mathcal{P}$ possède une solution et que celle-ci n'appartient pas à $\mathring{\mathtt{E}}$. D'autre part, f et g sont continûment dérivables, donc différentiables, sur $\mathbb{R}^3$ et

$$\nabla g = 2x\,\mathbf{e}_x + 2y\,\mathbf{e}_y + 2z\,\mathbf{e}_z \neq \mathbf{0} \qquad \text{sur } \partial\mathtt{E}$$

Dès lors, le minimum recherché se trouve parmi les points stationnaires du Lagrangien.

On considère donc le système

$$\nabla L = 0 \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} 6x - 2a - 2\lambda x = 0 \\ 6y - 2b - 2\lambda y = 0 \\ 6z - 2c - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \end{cases}$$

Les trois premières équations ne peuvent être vérifiée si $\lambda = 3$ et conduisent à

$$x = \frac{a}{3-\lambda}, \quad y = \frac{b}{3-\lambda}, \quad z = \frac{c}{3-\lambda}$$

En injectant ces expressions dans la dernière équation, on obtient alors aisément

$$3 - \lambda = \pm\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{R} = \pm\frac{\ell}{R}$$

et les composantes correspondantes des deux points stationnaires du Lagrangien

$$\mathsf{x}_1 = -\frac{R}{\ell}(a,b,c) \qquad \text{et} \qquad \mathsf{x}_2 = \frac{R}{\ell}(a,b,c)$$

Parmi eux se trouvent le minimum et le maximum de f et il suffit donc de comparer les valeurs de f en ces points pour les distinguer. Sachant que

$$f(\mathsf{x}_2) = 2R^2 + (R-\ell)^2 < 2R^2 + (R+\ell)^2 = f(\mathsf{x}_1)$$

on en conclut que f atteint son minimum au point x_2.

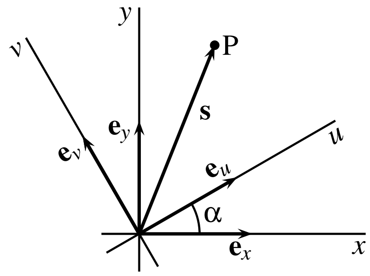
En conclusion,

- si $3R \geq \ell$: l'antenne doit être placée au point $\dfrac{1}{3}(a,b,c)$;
- si $3R < \ell$: elle doit alors être placée au point $\dfrac{R}{\ell}(a,b,c)$.

Question IV

i. D'une part, les coordonnées (x,y) et (u,v) d'un point P dans les deux repères permettent d'exprimer le vecteur position de celui-ci sous les deux formes équivalentes

$$\mathbf{s} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y = u\,\mathbf{e}_u + v\,\mathbf{e}_v \qquad (\ddagger)$$



D'autre part, les vecteurs unitaires sont reliés l'un à l'autre par

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \cos\alpha\;\mathbf{e}_u - \sin\alpha\;\mathbf{e}_v \\ \mathbf{e}_y = \sin\alpha\;\mathbf{e}_u + \cos\alpha\;\mathbf{e}_v \end{cases}$$

En projetant $(\ddagger)$ sur $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$, il vient dès lors, comme annoncé,

$$\begin{cases} u = \;\; x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ v = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad (\heartsuit)$$

ii. Pour étudier la régularité du changement de variables, on considère successivement les éléments suivants.

- Les relations $(\heartsuit)$ peuvent être inversées sous la forme

$$\begin{cases} x = u\cos\alpha - v\sin\alpha \\ y = u\sin\alpha + v\cos\alpha \end{cases}$$

  quels que soient (u,v) et définissent donc une bijection entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$.
- Les fonctions $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^2$.
- Le jacobien

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1$$

  est non nul sur $\mathbb{R}^2$.

Dès lors, les relations $(\heartsuit)$ définissent un changement de variables régulier d'ordre infini entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$.

iii. Par application du théorème de dérivation des fonctions composées, on obtient directement

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial v} = \cos\alpha\,\dfrac{\partial}{\partial u} - \sin\alpha\,\dfrac{\partial}{\partial v} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial v} = \sin\alpha\,\dfrac{\partial}{\partial u} + \cos\alpha\,\dfrac{\partial}{\partial v} \end{cases}$$

On peut alors étudier l'effet du changement de variables sur les opérateurs de dérivation d'ordre 2. On obtient d'une part

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} \\ &= \left(\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial u} - \sin\alpha\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial u} - \sin\alpha\,\frac{\partial}{\partial v}\right) \\ &= \cos^2\alpha\,\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\cos\alpha\sin\alpha\,\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} + \sin^2\alpha\,\frac{\partial^2}{\partial v^2} \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \left(\sin\alpha\,\frac{\partial}{\partial u}+\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\sin\alpha\,\frac{\partial}{\partial u}+\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial v}\right) \\
&= \sin^2\alpha\,\frac{\partial^2}{\partial u^2}+2\cos\alpha\sin\alpha\,\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}+\cos^2\alpha\,\frac{\partial^2}{\partial v^2}
\end{aligned}
$$

En additionnant les deux égalités membre à membre, on en conclut que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

iv. Rassemblant les résultats ci-dessus, on a

$$
\begin{aligned}
\nabla &= \mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \mathbf{e}_x\left(\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial u}-\sin\alpha\,\frac{\partial}{\partial v}\right)+\mathbf{e}_y\left(\sin\alpha\,\frac{\partial}{\partial u}+\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial v}\right) \\
&= (\mathbf{e}_x\cos\alpha+\mathbf{e}_y\sin\alpha)\,\frac{\partial}{\partial u}+(-\mathbf{e}_x\sin\alpha+\mathbf{e}_y\cos\alpha)\,\frac{\partial}{\partial v} \\
&= \mathbf{e}_u\frac{\partial}{\partial u}+\mathbf{e}_v\frac{\partial}{\partial v}
\end{aligned}
$$