Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2018

MATH0002-4 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 3 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille (en majuscules) et votre prénom.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Précisez comment se lit l'expression $f(x) = O[g(x)]$, $(x \to x_0)$ et définissez mathématiquement le concept traduit par cette notation.

ii. Montrez que

$$y_1(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad y_2(x) = \int_0^x e^{\cos t}\, dt$$

constituent un ensemble fondamental de solutions de l'équation $y''(x) + \sin x\, y'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

iii. Si la fonction réelle $f \in C_\infty(\mathbb{R}^2)$ réalise son maximum strict en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, peut-on affirmer que la matrice Hessienne en ce point est définie positive ? Justifiez.

iv. Exprimez en français l'égalité

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{g})$$

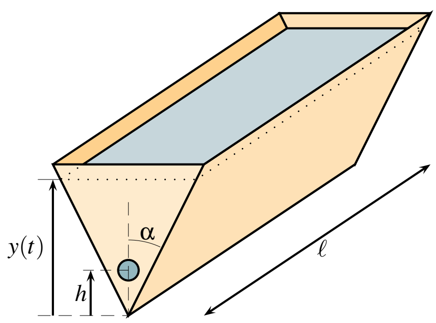
et démontrez cette formule dans $\mathbb{R}^3$. Quelles hypothèses doit-on formuler sur $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ pour que cette formule soit valable ?

Question II

On considère un réservoir prismatique à base triangulaire dont le contenu liquide s'écoule par un orifice de section S percé à la hauteur h au-dessus du fond. Selon la loi de Torricelli, la vitesse d'écoulement du liquide à travers l'orifice est donnée par $v = \sqrt{2g[y(t) - h]}$ où $y(t)$ désigne le niveau du liquide dans le réservoir à l'instant t considéré. Dans ces conditions, $y(t)$ varie selon

$$2\ell \operatorname{tg} \alpha\, y \frac{dy}{dt} = -S\sqrt{2g(y-h)}$$

où α désigne l'angle d'ouverture du prisme, ℓ sa longueur et g l'accélération de pesanteur.



Déterminez le temps nécessaire pour que le niveau du liquide dans le réservoir passe de $3h$ à $2h$.

Tournez la page.

Question III

Pour résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2$$

où f est une fonction inconnue de deux variables x et y, on introduit le changement de variables

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = \dfrac{x}{y} \end{cases} \qquad (\spadesuit)$$

i. Étudiez la régularité du changement de variables. En particulier, représentez graphiquement les courbes $\xi = \mathit{constante}$ et $\eta = \mathit{constante}$ dans le plan (x, y) et déterminez des ouverts connexes (*i.e.* d'un seul tenant) Ω et Ω' aussi grands que possible entre lesquels les relations ($\spadesuit$) définissent un changement de variables régulier.

ii. Déterminez l'image des opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}$ par le changement de variables.

iii. Exprimez la forme prise par l'équation différentielle en fonction des variables ξ et η.

iv. Déterminez la forme la plus générale de la solution de l'équation différentielle en fonction des variables x et y.

SOLUTION TYPE

Question I

i. La notation $f(x) = O[g(x)]$, $(x \to x_0)$ indique que f est *au plus de l'ordre de* g dans un voisinage de x_0, c'est à dire que
$$(\exists C > 0 \text{ et } V(x_0))(\forall x \in V(x_0)) : |f(x)| \leq C|g(x)|$$
S'il existe un voisinage de x_0 dans lequel g ne s'annule pas alors
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = M \text{ fini} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = O[g(x)],\ (x \to x_0)$$

ii. Les fonctions y_1 et y_2 forment un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$ si elles vérifient l'équation et sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.
Notons tout d'abord que les fonctions
$$y_1(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad y_2(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\cos t}\, dt$$
sont des solutions de l'équation différentielle $y''(x) + \sin x\, y'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{array}{ll} y_1'(x) = 0 & y_1''(x) = 0 \\ y_2'(x) = \mathrm{e}^{\cos x} & y_2''(x) = -\sin x\, \mathrm{e}^{\cos x} \end{array}$$
de sorte que
$$y_{1,2}''(x) + \sin x\, y_{1,2}'(x) = 0$$
Les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$ puisque leur Wronskien
$$\mathsf{W}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \int_0^x \mathrm{e}^{\cos t}\, dt \\ 0 & \mathrm{e}^{\cos x} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{\cos x}$$
ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Dès lors, les fonctions y_1 et y_2 forment un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$.

iii. Non, si la fonction réelle $f \in C_\infty(\mathbb{R}^2)$ réalise son maximum strict en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, on ne peut en déduire que la matrice Hessienne en ce point est définie positive.
Pour s'en convaincre, on peut par exemple considérer la fonction
$$f(x,y) = -(x^4 + y^4) \leq 0$$
qui réalise son maximum absolu en $(x_0, y_0) = (0,0)$. La matrice Hessienne en ce point est donnée par
$$\mathsf{H}(0,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} -12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
qui n'est pas définie positive (puisque ses valeurs propres sont nulles).

iv. La relation
$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{g})$$
peut être énoncée de la façon suivante :

"*La divergence du produit vectoriel des champs vectoriels* **f** *et* **g** *est égale au produit scalaire de* **g** *et du rotationnel de* **f** *diminué du produit scalaire de* **f** *et du rotationnel de* **g**."

Notant (f_x, f_y, f_z) et (g_x, g_y, g_z) les composantes de **f** et **g**, on a

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g}) &= \frac{\partial}{\partial x}(f_y g_z - f_z g_y) + \frac{\partial}{\partial y}(f_z g_x - f_x g_z) + \frac{\partial}{\partial z}(f_x g_y - f_y g_x)\\ &= \frac{\partial f_y}{\partial x}g_z + f_y\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial f_z}{\partial x}g_y - f_z\frac{\partial g_y}{\partial x} + \frac{\partial f_z}{\partial y}g_x + f_z\frac{\partial g_x}{\partial y} - \frac{\partial f_x}{\partial y}g_z\\ &\quad - f_x\frac{\partial g_z}{\partial y} + \frac{\partial f_x}{\partial z}g_y + f_x\frac{\partial g_y}{\partial z} - \frac{\partial f_y}{\partial z}g_x - f_y\frac{\partial g_x}{\partial z}\end{aligned}$$

En regroupant, il vient

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{f}\wedge\mathbf{g}) &= f_x\left(\frac{\partial g_y}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial y}\right) + f_y\left(\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z}\right) + f_z\left(\frac{\partial g_x}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial x}\right)\\ &\quad + g_x\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right) + g_y\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right) + g_z\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\\ &= -\mathbf{f}\cdot(\nabla\wedge\mathbf{g}) + \mathbf{g}\cdot(\nabla\wedge\mathbf{f})\end{aligned}$$

puisque

$$\nabla\wedge\mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

et

$$\nabla\wedge\mathbf{g} = \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

Pour que les opérations conduisant au résultat final soient licites sur $\mathbb{R}^3$, il suffit que **f** et **g** soient dérivables sur $\mathbb{R}^3$ (ce qui est équivalent à la dérivabilité de leurs composantes).

Question II

L'équation différentielle

$$2\ell\,\mathrm{tg}\,\alpha\, y\,\frac{dy}{dt} = -S\sqrt{2g(y-h)}$$

gouvernant l'évolution temporelle de la hauteur du fluide dans le réservoir est à variables séparables. Sa solution peut être obtenue en évaluant les deux membres de

$$\frac{2\ell\,\mathrm{tg}\,\alpha}{S\sqrt{2g}}\int\frac{y}{\sqrt{y-h}}\,dy = -\int dt \qquad (\Diamond)$$

Remarquons que la solution particulière $y = h$ ne doit pas être considérée ici puisque le niveau du liquide dans le réservoir diminue de $y = 3h$ à $y = 2h$.

Notant T le temps nécessaire pour que le niveau du liquide dans le réservoir passe de $3h$ à $2h$, on peut faire apparaître les conditions auxiliaires dans l'expression ci-dessus

$$y(0) = 3h \qquad \text{et} \qquad y(T) = 2h$$

de sorte que

$$\frac{2\ell \operatorname{tg}\alpha}{S\sqrt{2g}} \int_{3h}^{2h} \frac{y}{\sqrt{y-h}}\, dy = -\int_0^T dt$$

soit

$$T = \frac{2\ell \operatorname{tg}\alpha}{S\sqrt{2g}} \int_{2h}^{3h} \frac{y}{\sqrt{y-h}}\, dy$$

L'intégrale peut être évaluée en posant $y-h=u^2$, $dy = 2u\,du$. Il vient

$$\begin{aligned}
T &= \frac{2\ell \operatorname{tg}\alpha}{S\sqrt{2g}} \int_{\sqrt{h}}^{\sqrt{2h}} \frac{h+u^2}{u} 2u\,du \\
&= \frac{4\ell \operatorname{tg}\alpha}{S\sqrt{2g}} \left[hu + \frac{u^3}{3} \right]_{\sqrt{h}}^{\sqrt{2h}} \\
&= \frac{4\ell h^{3/2} \operatorname{tg}\alpha}{S\sqrt{2g}} \left[\sqrt{2} - 1 + \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \right] = \frac{4\ell h^{3/2} \operatorname{tg}\alpha}{3S\sqrt{g}} \left[5 - 2\sqrt{2} \right]
\end{aligned}$$

De façon alternative, on peut procéder en déterminant la solution générale de l'équation en évaluant les deux membres de ($\diamondsuit$). Par le changement de variable $y-h=u^2$, $dy=2u\,du$, on a

$$\begin{aligned}
-t + C &= \frac{2\ell \operatorname{tg}\alpha}{S\sqrt{2g}} \int \frac{y}{\sqrt{y-h}}\, dy \\
&= \frac{4\ell \operatorname{tg}\alpha}{S\sqrt{2g}} \int (h+u^2)\, du \\
&= \frac{4\ell \operatorname{tg}\alpha}{S\sqrt{2g}} \left(hu + \frac{u^3}{3} \right) \\
&= \frac{4\ell \operatorname{tg}\alpha}{S\sqrt{2g}} \sqrt{y-h} \left(h + \frac{y-h}{3} \right) \\
&= \frac{4\ell \operatorname{tg}\alpha}{3S\sqrt{2g}} \sqrt{y-h}\, (y+2h)
\end{aligned}$$

Ce résultat constitue un expression implicite de la loi $y(t)$ de variation de la hauteur d'eau dans le réservoir.

La constante d'intégration C peut être fixée en utilisant la condition initiale $y(0) = 3h$. On obtient aisément

$$C = \frac{4\ell \operatorname{tg}\alpha}{3S\sqrt{2g}} \sqrt{2h}\, (5h) = \frac{20\, \ell\, h^{3/2} \operatorname{tg}\alpha}{3S\sqrt{g}}$$

Le temps T recherché peut ensuite être obtenu en considérant la solution de l'équation pour $y(T) = 2h$, soit

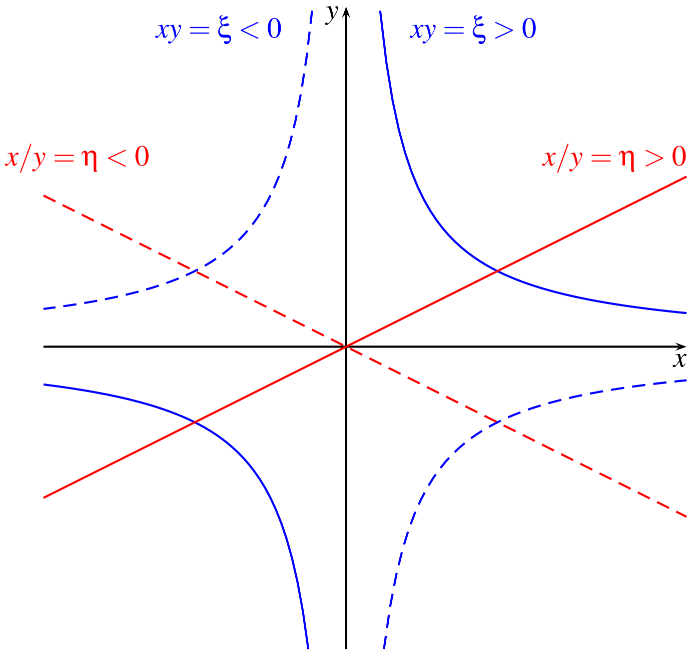
$$-T + C = \frac{4\ell \operatorname{tg}\alpha}{3S\sqrt{2g}} \sqrt{h}\, (4h)$$

et dès lors

$$T = C - \frac{4\ell \operatorname{tg}\alpha}{3S\sqrt{2g}} \sqrt{h}\, (4h) = \frac{4\ell h^{3/2} \operatorname{tg}\alpha}{3S\sqrt{g}} \left[5 - 2\sqrt{2} \right]$$

Question III

i. Dans le plan (x,y), les courbes $\xi = \mathit{constante}$ et $\eta = \mathit{constante}$ sont respectivement des hyperboles équilatères et des droites passant par l'origine de pente $1/\eta$.



Examinons les différentes conditions sous lesquelles les relations

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = \dfrac{x}{y} \end{cases} \tag{$\spadesuit$}$$

définissent un changement de variables régulier entre des ouverts $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (ouvert de variation de (x,y)) et $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ (ouvert de variation de (ξ,η)).

(a) Les relations définissent une bijection entre

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0,\ y > 0\right\}$$

et

$$\Omega' = \left\{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \xi > 0,\ \eta > 0\right\}.$$

En effet, on remarque d'abord que les axes $x = 0$ et $y = 0$ ne peuvent être décrits par le changement de variables puisque le premier demande que η soit infini et puisque le cas $y = 0$ est exclu par la définition de η. Si on souhaite travailler dans un ouvert connexe, on doit donc définir le changement de variables sur un seul quadrant.
Choisissant de travailler dans le premier quadrant Ω (On peut procéder de la même façon dans un autre quadrant.), l'étude graphique montre que les courbes $\xi = \mathit{constante}$ et $\eta = \mathit{constante}$ avec ξ et η positifs présentent une intersection unique dans Ω. Les relations définissent donc bien une bijection entre les ouverts Ω et Ω' décrits ci-dessus, *i.e.* à tout couple $(x,y) \in \Omega$ les relations font correspondre un couple $(\xi,\eta) \in \Omega'$ et, inversement, à tout couple $(\xi,\eta) \in \Omega'$ correspondent une hyperbole et une droite qui se croisent en un seul point de Ω.

De façon alternative, on peut montrer que les relations ($\spadesuit$) établissent une bijection entre les ouverts connexes Ω et Ω' en inversant algébriquement le changement de variables. On obtient, à condition de travailler dans ces ouverts Ω et Ω',

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = \dfrac{x}{y} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{\xi\eta} \\ y = \sqrt{\dfrac{\xi}{\eta}} \end{cases}$$

(b) Il résulte de leur définition que les fonctions ξ et η des variables x et y sont infiniment continûment dérivables sur Ω.

(c) Le Jacobien ne s'annule pas sur Ω :

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{2x}{y} \neq 0 \text{ sur } \Omega.$$

En conclusion, les relations (♠) définissent un changement de variables régulier d'ordre infini entre Ω et Ω'.

ii. En vertu du théorème de dérivation des fonctions composées, on a

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = y\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$= \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\frac{\partial}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta} = x\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{x}{y^2}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$= \sqrt{\xi\eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\frac{\partial}{\partial \eta}$$

iii. En exploitant les relations définissant le changement de variables et les formules de transformation des dérivées établies en ii., l'équation différentielle

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2$$

peut s'écrire sous la forme

$$\sqrt{\xi\eta}\left[\sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\ \frac{\partial g}{\partial \xi} + \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\ \frac{\partial g}{\partial \eta}\right] - \sqrt{\frac{\xi}{\eta}}\left[\sqrt{\xi\eta}\ \frac{\partial g}{\partial \xi} - \eta\sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\ \frac{\partial g}{\partial \eta}\right] = 2\xi\eta$$

où on a noté $g(\xi,\eta) = f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$. Après simplification, il vient

$$\frac{\partial g}{\partial \eta} = \xi \qquad (\heartsuit)$$

iv. La solution générale de l'équation ($\heartsuit$) est donnée par $g(\xi,\eta) = \xi\eta$, à une constante additive près au regard de η, ce qui conduit à

$$g(\xi,\eta) = \xi\eta + G(\xi)$$

où G désigne une fonction arbitraire de la variable ξ.

La solution générale de l'équation initiale exprimée en fonction des variables x et y s'écrit donc sous la forme

$$f(x,y) = x^2 + F(xy).$$

où F désigne une fonction quelconque d'une variable (dérivable sur $]0,+\infty[$).