Prof. Éric J.M.DELHEZ

Juin 2017

MATH0002-4 - Analyse Mathématique 1
Examen

Durée de l'épreuve : 3 heures 30.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.

Question I

i. Définissez mathématiquement le concept de fonctions asymptotiques l'une à l'autre au voisinage d'un point a de $\mathbb{R}$. Citez, en le justifiant, un exemple de deux fonctions asymptotiques l'une à l'autre au voisinage de 0.

ii. Qu'est-ce que $C_0(\mathbb{R})$?

iii. Définissez mathématiquement le concept de fonction différentiable en un point x d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Quelle est la différence entre les concepts de dérivabilité et de différentiabilité dans le cas où $n = 1$ (*i.e.* dans $\mathbb{R}$) ? Justifiez.

iv. Appliquez la formule de Taylor à l'ordre 1 au voisinage du point $(0,1)$ à la fonction $f(x,y)$. Quelles hypothèses la fonction f doit-elle vérifier ?

v. Si les champs vectoriels $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont deux fois continûment dérivables sur $\mathbb{R}^3$, exprimez $\nabla \cdot (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g})$ en fonction des rotationnels de $\mathbf{f}$ et de $\mathbf{g}$.

Question II

Le système des coordonnées paraboliques est défini par les relations

$$\begin{cases} x = uv \\ y = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases}$$

i. Représentez dans l'espace (x,y) les courbes $u = Constante$ et $v = Constante$.

ii. Étudiez la régularité du changement de variables dans

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\}$$

iii. Déterminez l'image des opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}$ dans le système des coordonnées paraboliques.

iv. Montrez qu'on peut définir des vecteurs unitaires orthogonaux $\mathbf{e}_u$ et $\mathbf{e}_v$ tels que

$$\nabla = \frac{1}{h(u,v)}\left[\mathbf{e}_u \frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{e}_v \frac{\partial}{\partial v}\right]$$

où $h(u,v)$ est une fonction à déterminer.

Tournez la page.

Question III

L'inertie d'un capteur de température peut être source d'erreurs de la mesure que celui-ci indique. Pour le voir, on considère un capteur dont la température $T(t)$ évolue en fonction de la température extérieure $T_{air}(t)$ selon

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(T_{air} - T), \qquad T(0) = T_0$$

où t désigne le temps exprimé en secondes et où α et T_0 sont deux constantes positives.

i. Résolvez le problème différentiel ci-dessus dans le cas où la température de l'air T_{air} est constante (avec $T_{air} \neq T_0$) et déterminez la valeur de la constante α sachant qu'il faut 0.1 seconde pour que la différence de température entre le capteur et son environnement soit réduite à 10 % de sa valeur initiale.

   Dans la suite, gardez α comme paramètre sans utiliser la valeur déterminée dans cette question.

ii. Déterminez l'évolution de la température mesurée par le capteur si la température de l'air évolue selon

$$T_{air}(t) = T_0 + \Delta T \sin \omega t$$

   où ΔT et ω sont des constantes strictement positives.

iii. Montrez que, pour $t \to \infty$, la mesure du capteur oscille à la même fréquence que la température de l'air. Déterminez l'amplitude des oscillations ainsi que le déphasage entre la température de l'air et celle enregistrée par le capteur.

Question I

i. Une fonction f est asymptotique à une fonction g au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ lorsque

$$f(x) - g(x) = o\big[g(x)\big], \qquad (x \to a)$$

S'il existe un voisinage de a dans lequel $g(x) \neq 0$ pour tout $x \neq a$, alors

$$f(x) \sim g(x), \quad (x \to a) \qquad \text{ssi} \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Par exemple,

$$\sin x \sim x, \qquad (x \to 0) \qquad \text{puisque} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

ii. On note $C_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

iii. On dit d'une fonction f qu'elle est différentiable en un point x d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lorsque f est dérivable en x et

$$f(\mathsf{x}+\mathsf{h}) - f(\mathsf{x}) = \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathsf{x}) + o(|\mathsf{h}|), \qquad (\mathsf{h} \to 0)$$

Autrement dit, une fonction f est différentiable en un point si elle peut être approchée localement par l'expression linéaire construite à partir de sa différentielle.
Dans $\mathbb{R}$, il n'y a aucune différence entre les concepts de dérivabilité et de différentiabilité. En effet, si f est dérivable en $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = 0$$

Dès lors

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + o(h), \qquad (h \to 0)$$

et f est différentiable en x.

iv. Si f est réelle et deux fois continûment dérivable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ tel que le segment joignant le point $(0,1)$ à $(\Delta x, 1+\Delta y)$ est entièrement compris dans Ω, alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(\Delta x, 1+\Delta y) = f(0,1) &+ \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \\ &+ \frac{1}{2}\Delta x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathsf{x}^\star) + \frac{1}{2}\Delta y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathsf{x}^\star) + \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathsf{x}^\star) \end{aligned}$$

où $\mathsf{x}^\star = (\theta \Delta x, 1 + \theta \Delta y)$.

v. Si les champs vectoriels $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont continûment dérivables sur $\mathbb{R}^3$ alors, notant (f_x, f_y, f_z) et (g_x, g_y, g_z) les composantes de $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) &= \frac{\partial}{\partial x}(f_y g_z - f_z g_y) + \frac{\partial}{\partial y}(f_z g_x - f_x g_z) + \frac{\partial}{\partial z}(f_x g_y - f_y g_x) \\ &= \frac{\partial f_y}{\partial x} g_z + f_y \frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial f_z}{\partial x} g_y - f_z \frac{\partial g_y}{\partial x} + \frac{\partial f_z}{\partial y} g_x + f_z \frac{\partial g_x}{\partial y} - \frac{\partial f_x}{\partial y} g_z \\ &\quad - f_x \frac{\partial g_z}{\partial y} + \frac{\partial f_x}{\partial z} g_y + f_x \frac{\partial g_y}{\partial z} - \frac{\partial f_y}{\partial z} g_x - f_y \frac{\partial g_x}{\partial z} \end{aligned}$$

En regroupant, il vient

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}) &= f_x \left(\frac{\partial g_y}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial y} \right) + f_y \left(\frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} \right) + f_z \left(\frac{\partial g_x}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial x} \right) \\ &\quad + g_x \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) + g_y \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) + g_z \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \\ &= -\mathbf{f} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{g}) + \mathbf{g} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{f}) \end{aligned}$$

puisque

$$\nabla \wedge \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

et

$$\nabla \wedge \mathbf{g} = \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} - \frac{\partial g_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial g_x}{\partial z} - \frac{\partial g_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

Question II

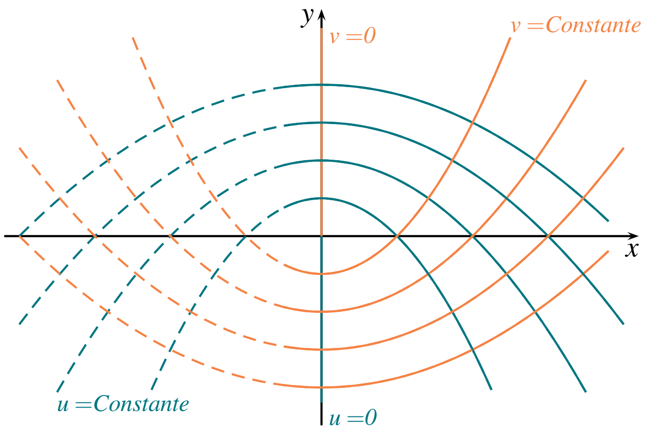
i. Pour toutes les valeurs non nulles de u, on a $v = x/u$ et

$$y = -\frac{x^2}{2u^2} + \frac{u^2}{2}$$

qui décrit une famille de paraboles de sommet $(0, u^2/2)$ et dont la concavité est orientée vers le bas. De même, pour toutes les valeurs non nulles de v, on a $u = x/v$ et

$$y = \frac{x^2}{2v^2} - \frac{v^2}{2}$$

qui décrit une famille de paraboles de sommet $(0, -v^2/2)$ et dont la concavité est orientée vers le haut.
Dans le cas particulier où $u = 0$ ou $v = 0$, les paraboles précédentes dégénèrent respectivement en les demi-droites $x = 0$, $y \leq 0$ et $x = 0$, $y \geq 0$.
Graphiquement, on a donc



Remarquons que les courbes $u = +C$ et $u = -C$ sont confondues, de même que les courbes $v = +C'$ et $v = -C'$.

ii. Les relations

$$\begin{cases} x = uv \\ y = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases}$$

qui définissent le changement de variables sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^2$.

Les relations introduisent une correspondance biunivoque entre les ensembles

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\}$$

et

$$\Omega' = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0,\ v > 0\right\}$$

En effet, à chaque $(u,v) \in \Omega'$ correspond un point de Ω. Inversement, chaque $(x,y) \in \Omega$ se situe à l'intersection d'une parabole unique du type $u = \mathit{Constante}$ et d'une parabole unique du type $v = \mathit{Constante}$; il lui correspond donc un élément unique $(u,v) \in \Omega'$.

De façon alternative, on peut étudier la biunivocité en inversant algébriquement le changement de variables. De la première relation, on tire $v = x/u$ (on notera que $u \neq 0$) qu'on peut ensuite injecter dans la seconde relation, *i.e.*

$$y = -\frac{x^2}{2u^2} + \frac{u^2}{2}, \qquad \text{soit} \qquad u^4 - 2u^2 y - x^2 = 0$$

En résolvant par rapport à u, on obtient

$$u = \pm\sqrt{y + \sqrt{x^2+y^2}}$$

Entre les ouverts Ω et Ω', on a donc

$$\begin{cases} x = uv \\ y = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2) \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} u = \sqrt{y + \sqrt{x^2+y^2}} \\ v = \dfrac{x}{\sqrt{y + \sqrt{x^2+y^2}}} \end{cases}$$

Le Jacobien s'écrit

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ u & -v \end{vmatrix} = -(u^2+v^2) \neq 0 \quad \text{sur } \Omega'$$

En conclusion, le changement de variables est régulier d'ordre infini entre les ouverts Ω et Ω'.

iii. Par application des règles de dérivation des fonctions composées, on a

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y} = v\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial}{\partial y} = u\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial y}$$

En résolvant par rapport aux dérivées partielles recherchées, il vient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{1}{u^2+v^2}\left(v\dfrac{\partial}{\partial u} + u\dfrac{\partial}{\partial v}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{1}{u^2+v^2}\left(u\dfrac{\partial}{\partial u} - v\dfrac{\partial}{\partial v}\right) \end{cases}$$

iv. Les résultats précédents peuvent être écrits sous la forme vectorielle

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{1}{u^2+v^2}\mathbf{e}_x\left(v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{1}{u^2+v^2}\mathbf{e}_y\left(u\frac{\partial}{\partial u} - v\frac{\partial}{\partial v}\right) \\ &= \frac{v\mathbf{e}_x + u\mathbf{e}_y}{u^2+v^2}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{u\mathbf{e}_x - v\mathbf{e}_y}{u^2+v^2}\frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

Introduisons les vecteurs

$$\begin{cases} \mathbf{e}_u = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(v\mathbf{e}_x + u\mathbf{e}_y) \\ \mathbf{e}_v = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(u\mathbf{e}_x - v\mathbf{e}_y) \end{cases}$$

Ces vecteurs sont unitaires et mutuellement orthogonaux puisque

$$\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_v = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(v\mathbf{e}_x + u\mathbf{e}_y) \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(u\mathbf{e}_x - v\mathbf{e}_y) = \frac{1}{u^2+v^2}(vu - uv) = 0$$

En fonction de ces vecteurs on peut écrire, comme annoncé,

$$\nabla = \frac{1}{h(u,v)}\left[\mathbf{e}_u\frac{\partial}{\partial u} + \mathbf{e}_v\frac{\partial}{\partial v}\right]$$

avec $h(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$.

Question III

i. Soit
$$\frac{dT}{dt} = \alpha(T_{air} - T)$$
Il s'agit une équation différentielle linéaire d'ordre un à variables séparables. Il vient (en écartant la solution $T = T_{air}$ puisque $T(0) = T_0 \neq T_{air}$)
$$\int \frac{dT}{T_{air} - T} = \int \alpha\, dt + \tilde{C}$$
puis, successivement,
$$-\ln|T_{air} - T| = \alpha t + \tilde{C}$$
$$T_{air} - T = \pm\, \mathrm{e}^{-\tilde{C}}\, \mathrm{e}^{-\alpha t}$$
et, introduisant la constante d'intégration $C = \pm\, \mathrm{e}^{-\tilde{C}}$,
$$T = T_{air} + C\, \mathrm{e}^{-\alpha t}$$

La condition initiale permet de déterminer la constante d'intégration en exploitant la relation
$$T(0) = T_0 = T_{air} + C \qquad \Rightarrow \qquad C = T_0 - T_{air}$$
Il vient donc finalement
$$T(t) = T_{air} + (T_0 - T_{air})\, \mathrm{e}^{-\alpha t}$$

Pour $t = 0.1$, on a
$$\frac{T - T_{air}}{T_0 - T_{air}} = \mathrm{e}^{-\alpha/10} = \frac{1}{10}$$
de sorte que
$$\alpha = 10\ \ln 10$$

ii. L'équation à résoudre s'écrit maintenant
$$\frac{dT}{dt} = \alpha(T_0 + \Delta T \sin\omega t - T)$$
ou encore
$$\frac{dT}{dt} + \alpha T = \alpha T_0 + \alpha \Delta T \sin\omega t$$
Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation étant linéaire, sa solution générale s'écrit comme la somme de la solution générale $T_h(t)$ de l'équation homogène et d'une solution particulière $T_p(t)$ de l'équation non homogène.

L'équation est linéaire à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $z + \alpha$. Il admet le seul zéro $z = -\alpha$. La solution générale de l'équation homogène est donc
$$T_h(t) = C_1\, \mathrm{e}^{-\alpha t}$$
où C_1 est une constante.

L'équation étant linéaire, le principe de superposition permet d'obtenir une solution particulière de l'équation en additionnant des solutions particulières des équations dont les seconds membres sont respectivement
$$f_1(t) = \alpha T_0 \qquad \text{et} \qquad f_2(t) = \alpha \Delta T \sin\omega t$$

- Dans le cas du second membre $f_1(t) = \alpha T_0$, on identifie par simple inspection la solution particulière
$$T_{p_1}(t) = T_0$$

- Dans le cas du second membre $f_2(t)$, nous pouvons rechercher une solution particulière de l'équation sous la forme
$$T_{p_2}(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$
où A et B sont des constantes. En injectant cette expression dans l'équation différentielle obtenue en portant la seule fonction $f_2(t)$ dans le second membre, il vient
$$-\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t + \alpha A\cos\omega t + \alpha B\sin\omega t = \alpha\Delta T\sin\omega t$$
Les constantes A et B sont donc telles que
$$\begin{cases} -\omega A + \alpha B = \alpha\Delta T \\ \omega B + \alpha A = 0 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} A = -\dfrac{\alpha\omega}{\omega^2+\alpha^2}\Delta T \\ B = \dfrac{\alpha^2}{\omega^2+\alpha^2}\Delta T \end{cases}$$
Dès lors
$$T_{p_2}(t) = -\frac{\alpha\omega}{\omega^2+\alpha^2}\Delta T\cos\omega t + \frac{\alpha^2}{\omega^2+\alpha^2}\Delta T\sin\omega t$$

La solution générale de l'équation non homogène est donc
$$T(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + T_0 - \frac{\alpha\omega}{\omega^2+\alpha^2}\Delta T\cos\omega t + \frac{\alpha^2}{\omega^2+\alpha^2}\Delta T\sin\omega t$$
La constante C_1 peut être déterminée en utilisant la condition initiale. On a
$$T(0) = C_1 + T_0 - \frac{\alpha\omega}{\omega^2+\alpha^2}\Delta T = T_0$$
et donc
$$C_1 = \frac{\alpha\omega}{\omega^2+\alpha^2}\Delta T$$
La solution du problème différentiel s'écrit finalement
$$T(t) = T_0 + \frac{\alpha\omega}{\omega^2+\alpha^2}\Delta T\,\mathrm{e}^{-\alpha t} - \frac{\alpha\omega}{\omega^2+\alpha^2}\Delta T\cos\omega t + \frac{\alpha^2}{\omega^2+\alpha^2}\Delta T\sin\omega t$$

iii. Pour $t \to \infty$, la partie de la solution associée à l'équation homogène tend vers zéro et
$$T(t) \sim T_0 - \frac{\alpha\omega}{\omega^2+\alpha^2}\Delta T\cos\omega t + \frac{\alpha^2}{\omega^2+\alpha^2}\Delta T\sin\omega t, \qquad (t \to +\infty)$$
La mesure du capteur présente donc des oscillations de fréquence ω égale à celle de la température de l'air.
On peut réécrire cette expression sous la forme
$$T(t) \sim T_0 + X\sin(\omega t - \varphi) = T_0 + X\cos\varphi\sin\omega t - X\sin\varphi\cos\omega t$$
faisant apparaître l'amplitude X et le déphasage φ des oscillations.
En identifiant les coefficients des fonctions sin et cos, il vient
$$\begin{cases} X\cos\varphi = \dfrac{\alpha^2}{\omega^2+\alpha^2}\Delta T \\ X\sin\varphi = \dfrac{\alpha\omega}{\omega^2+\alpha^2}\Delta T \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} X = \dfrac{\alpha\Delta T}{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega}{\alpha} \end{cases}$$