Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2019

MATH0002-4 - ANALYSE MATHÉMATIQUE 1
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille en MAJUSCULES et votre prénom en minuscules.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Si $f_1 = O(x)$ et $f_2 = O\left(x^2\right)$ au voisinage de 0, peut-on dire que $f_1 + f_2 = O\left(x\right),\ x \to 0$? Justifiez.

ii. Soit une fonction réelle $f \in C_2(\mathbb{R})$ telle que $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$. Si $f''(x_0) = 0$, peut-on en déduire que la dérivée seconde de f^{-1} (fonction réciproque de f) s'annule en $f(x_0)$? Justifiez.

iii. Soit $f \in C_2(\mathbb{R}^2)$. Peut-on affirmer que si f présente un maximum local en x_0, alors

$$\nabla f(\mathsf{x}_0) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\mathsf{x}^T \mathsf{H}(\mathsf{x}_0)\Delta\mathsf{x} < 0$$

où $\mathsf{H}(\mathsf{x}_0)$ désigne la matrice hessienne de f en x_0 ? Justifiez.

iv. Exprimez en français l'égalité

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2 \mathbf{f} \tag{‡}$$

et vérifiez cette formule dans le cas où $\mathbf{f} = g(x,y)\mathbf{e}_x + h(x,y)\mathbf{e}_y$ ne dépend pas explicitement de z et ne possède pas de composante selon $\mathbf{e}_z$.
Quelles hypothèses doit-on formuler sur $\mathbf{f}$ pour que l'égalité (‡) soit valable ?

Question II

i. Déterminez le plus grand intervalle $\mathtt{I}$ sur lequel la fonction $\operatorname{tg} x$ peut être approchée par un polynôme $\mathcal{P}_2$ d'ordre deux par application de la formule de Taylor au voisinage de $x = \pi/4$. Justifiez.

ii. Déterminez ce polynôme $\mathcal{P}_2$ et l'expression du reste $\mathcal{R}_2$ correspondant.

iii. En exploitant les résultats ci-dessus, montrez que

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{3} - \left(1 - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2}{72}\right)\right| \leq 0.05$$

On donne $\pi^3 \approx 31$.

Question III

Déterminez la solution $y(x)$ du problème différentiel

$$\begin{cases} y' + y^2 = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Tournez la page.

Question IV

Une barre AB de longueur L et de masse M repose sur une rotule O située à une distance $L/3$ de A. La barre peut tourner sans frottement autour de la rotule mais elle ne peut glisser par rapport à celle-ci. Le mouvement de la barre a lieu dans un plan vertical. Dans la barre, on a creusé une rainure et, dans la portion AO de celle-ci, on place une bille de masse m assimilable à un point matériel P qui y glisse sans frottement. Le système ainsi décrit est en équilibre si la barre est horizontale et que la bille se trouve entre A et O à une distance $r_* = LM/(6m)$ de O.

Afin d'étudier la stabilité de cette configuration d'équilibre, on établit les équations différentielles décrivant l'évolution de petites perturbations de celle-ci. Les perturbations $\eta(t)$ de l'angle d'équilibre de la barre et $\varepsilon(t)$ de la position d'équilibre de la bille obéissent à

$$\begin{cases} \left(\dfrac{ML^2}{9} + mr_*^2\right)\dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -mg\varepsilon \\ \\ m\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -mg\eta \end{cases}$$

où g est l'accélération (constante) de la pesanteur.

i. Déterminez la solution générale de ce système, *i.e.* l'évolution des perturbations η et ε en fonction du temps. Lors de la résolution, on posera utilement

$$\frac{mg^2}{\dfrac{ML^2}{9} + mr_*^2} = \alpha^4, \quad \alpha > 0$$

ii. En considérant des conditions initiales tout à fait générales, peut-on affirmer que les perturbations $\eta(t)$ et $\varepsilon(t)$ sont bornées, *i.e.* que l'équilibre est stable ? Justifiez.

Question V

Soit l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = xy^2$$

où $f(x,y)$ désigne une fonction inconnue. Pour résoudre le problème, on introduit le changement de variables

$$\begin{cases} u = x \\ v = xy \end{cases}$$

i. Déterminez les plus grands ouverts entre lesquels ces relations définissent un changement de variables régulier d'ordre 1. Justifiez.

ii. Déterminez l'expression des opérateurs différentiels $\dfrac{\partial}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}$ en fonction des variables u et v.

iii. Introduisez le changement de variables dans l'équation différentielle et exprimez le problème au moyen des variables indépendantes u et v.

iv. Déterminez la forme générale de la solution.

SOLUTION TYPE

Question I

i. Vu que $f_1 = O(x),\ x \to 0$, il existe un voisinage de l'origine $V_1(0)$ et une constante C_1 tels que

$$|f_1(x)| \le C_1|x| \quad \text{sur} \quad V_1(0)$$

Vu que $f_2 = O(x^2),\ x \to 0$, il existe un voisinage $V_2(0)$ et une constante C_2 tels que

$$|f_2(x)| \le C_2 x^2 \quad \text{sur} \quad V_2(0)$$

Ainsi, sur $V(0) = V_1(0) \cap V_2(0)$,

$$|f_1(x) + f_2(x)| \le |f_1(x)| + |f_2(x)| \le C_1|x| + C_2x^2$$

Or, sur $V(0) \cap]-1,1[,\ \ x^2 \le |x|$ donc

$$|f_1(x) + f_2(x)| \le (C_1 + C_2)\ |x|$$

de sorte que

$$f_1 + f_2 = O(x), \quad x \to 0$$

De façon alternative, on peut raisonner en termes de limites dans le cas où les relations

$$f_1 = O(x),\ x \to 0 \quad \text{et} \quad f_2 = O(x^2),\ x \to 0$$

résultent de

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)}{x} = M_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{f_2(x)}{x^2} = M_2$$

où M_1 et M_2 sont des constantes finies. Dans ce cas particulier, il vient

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{f_1(x)}{x} + \frac{f_2(x)x}{x^2} \right) = M_1$$

ce qui implique que

$$f_1 + f_2 = O(x), \quad x \to 0$$

ii. Puisque $f \in C_2(\mathbb{R})$ et $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$ le théorème des fonctions réciproques permet d'affirmer que f possède une fonction réciproque f^{-1} qui est deux fois continûment dérivable sur l'image de $\mathbb{R}$ par f et telle que

$$\frac{df^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}$$

Dérivant cette relation par rapport à y, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{d^2f^{-1}}{dy^2}(y) &= \frac{-1}{(f'[f^{-1}(y)])^2} \frac{d}{dy} f'[f^{-1}(y)] \\
&= \frac{-1}{(f'[f^{-1}(y)])^2} f''[f^{-1}(y)] \frac{df^{-1}}{dy}(y) \\
&= \frac{-1}{(f'[f^{-1}(y)])^2} f''[f^{-1}(y)] \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]} = \frac{-f''[f^{-1}(y)]}{(f'[f^{-1}(y)])^3}
\end{aligned}$$

soit, si $y = f(x_0)$ (et donc $x_0 = f^{-1}(y)$),

$$\frac{d^2f^{-1}}{dy^2}[f(x_0)] = \frac{-f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3}$$

Dès lors, si $f''(x_0) = 0$, il vient

$$\frac{d^2f^{-1}}{dy^2}[f(x_0)] = 0$$

iii. L'énoncé est faux comme le montre le contre-exemple de la fonction

$$f(x,y) = -(x^4 + y^4)$$

Cette fonction possède un maximum en $\mathsf{x}_0 = (0,0)$ et est telle que

$$\mathsf{H}(0,0) = \begin{pmatrix} -12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De là,

$$\Delta\mathsf{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{H}(0,0)\Delta\mathsf{x} = 0$$

ce qui est en contradiction avec l'énoncé proposé.

iv. La relation

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{f}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2\mathbf{f}$$

peut être énoncée de la façon suivante :

"*Le rotationnel du rotationnel du champ vectoriel* **f** *est égal au gradient de la divergence de* **f** *diminué du laplacien de* **f** *.*"

Les composantes de **f** étant données par $(g(x,y), h(x,y), 0)$, on a

$$\nabla \wedge \mathbf{f} = \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

et

$$\begin{aligned}\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{f}) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathbf{e}_x - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathbf{e}_y \\ &= \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\mathbf{e}_x + \left(-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\right)\mathbf{e}_y \qquad (\dagger)\end{aligned}$$

Par ailleurs, on calcule aisément

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\right)\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}\right)\mathbf{e}_y$$

et

$$\nabla^2\mathbf{f} = \nabla^2 g\;\mathbf{e}_x + \nabla^2 h\;\mathbf{e}_y = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\mathbf{e}_y$$

Combinant ces résultats, on obtient

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{f}) - \nabla^2\mathbf{f} &= \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\mathbf{e}_y \\ &= \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\mathbf{e}_x + \left(-\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}\right)\mathbf{e}_y\end{aligned}$$

Ceci démontre l'égalité proposée puisque ce résultat est identique à (†) si on tient compte de l'égalité des dérivées secondes croisées des fonctions g et h. Pour qu'il en soit ainsi et que les opérations conduisant au résultat final soient licites, il faut donc que les fonctions g et h soient deux fois continûment dérivables.

Question II

i. La formule de Taylor peut être appliquée à l'ordre deux dans le voisinage de $\pi/4$ à toute fonction réelle appartenant à $C_2([\pi/4,x])$ (ou $C_2([x,\pi/4])$ si $x<\pi/4$) et trois fois dérivable sur $]\pi/4,x[$ (ou $]x,\pi/4[$).

La fonction $f(x)=\operatorname{tg}x$ étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathtt{I}=]-\pi/2,\pi/2[$, on peut lui appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $\pi/4$ pour exprimer $f(x)$ en tout point de cet intervalle.

ii. La formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction $f(x)=\operatorname{tg}x$ s'écrit

$$f(x)=\mathcal{P}_2(x)+\mathcal{R}_2(x)$$

où

$$\mathcal{P}_2(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)f'\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

et

$$\mathcal{R}_2(x)=\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 f^{(3)}(\xi)\quad\text{avec}\quad \xi\in\left]\frac{\pi}{4},x\right[\quad\left(\text{ou }\left]x,\frac{\pi}{4}\right[\right)$$

D'une part, il vient successivement

$$\begin{aligned} f(x)&=\operatorname{tg}x & f\left(\frac{\pi}{4}\right)&=1\\ f'(x)&=\frac{1}{\cos^2 x} & f'\left(\frac{\pi}{4}\right)&=2\\ f''(x)&=\frac{2\sin x}{\cos^3 x} & f''\left(\frac{\pi}{4}\right)&=4 \end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathcal{P}_2(x)=1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$$

D'autre part, on calcule également

$$f'''(x)=\frac{2+4\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

de sorte que le reste peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{R}_2(x)=\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\left(\frac{2+4\sin^2\xi}{\cos^4\xi}\right)\quad\text{avec}\quad \xi\in\left]\frac{\pi}{4},x\right[\quad\left(\text{ou }\left]x,\frac{\pi}{4}\right[\right)$$

iii. Vu que $x=\pi/6\in]-\pi/2,\pi/2[$, la formule de Taylor obtenue au point ii. peut être utilisée en ce point et conduit à

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}&=1+2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)^3\left(\frac{2+4\sin^2\xi}{\cos^4\xi}\right)\\ &=1-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi^2}{72}-\frac{\pi^3}{12^3}\left(\frac{2+4\sin^2\xi}{6\cos^4\xi}\right)\quad\text{avec}\quad\xi\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[\end{aligned}$$

On a donc

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{3}-\left(1-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi^2}{72}\right)\right|=\left|\frac{\pi^3}{12^3}\left(\frac{2+4\sin^2\xi}{6\cos^4\xi}\right)\right|\leq\frac{\pi^3}{12^3}\left(\frac{2+4\sin^2\frac{\pi}{4}}{6\cos^4\frac{\pi}{4}}\right)$$

puisque $\sin^2\xi \leq \sin^2\frac{\pi}{4}$ et $\cos^4\xi \geq \cos^4\frac{\pi}{4}$ quand $\xi \in \left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[$.
Ainsi, il vient comme annoncé

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{3} - \left(1-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi^2}{72}\right)\right| \leq \frac{\pi^3}{12^3}\frac{4}{6/4} \leq \frac{32}{12^3}\cdot\frac{16}{6} = \frac{2^5\cdot 2^4}{3^4\cdot 2^7} = \frac{4}{81} < \frac{4}{80} = \frac{1}{20} = 0.05$$

Question III

L'équation

$$y' + y^2 = 1$$

peut s'écrire sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$$

qui est une équation différentielle à variables séparables. Sa solution générale peut être obtenue en évaluant

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \int dx + C \qquad (\heartsuit)$$

où C est une constante.

Remarquons que les solutions $y = 1$ et $y = -1$ sont perdues lors de cette réécriture de l'équation. Ces solutions singulières ne sont cependant pas des solutions du problème posé puisqu'elles ne vérifient pas la condition auxiliaire $y(1) = 0$.

En évaluant les primitives dans ($\heartsuit$), on obtient

$$\operatorname{arcth}(y) = x + C$$

où le choix de la primitive (arcth y et pas arcoth y) de la fonction $1/(1-y^2)$ est dicté par la condition auxiliaire qui amène à considérer les variations de y dans un intervalle comprenant l'origine.

La solution du problème est obtenue en imposant que $y(1) = 0$, ce qui donne

$$C = \operatorname{arcth}(0) - 1 = -1 \quad \text{donc} \quad \operatorname{arcth}(y) = x - 1$$

et, finalement,

$$y(x) = \operatorname{th}(x-1)$$

Remarquons qu'il est aussi possible de calculer une primitive de la fonction de y en utilisant la technique de primitivation des fractions simples. On a

$$\frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-y} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+y}$$

de sorte que

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = -\frac{1}{2}\ln|1-y| + \frac{1}{2}\ln|1+y| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$$

et donc que

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = x + C$$

où C est une constante.

La solution du problème est obtenue en imposant que $y(1) = 0$, ce qui donne

$$C = -1$$

c'est-à-dire

$$\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 2x-2$$

puisque la solution du problème est valable pour $y \in]-1,1[$ vu la condition auxiliaire. On obtient donc

$$\frac{1+y}{1-y} = \mathrm{e}^{2x-2}$$

soit

$$1+y = (1-y)\,\mathrm{e}^{2x-2}$$

et, finalement,

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x-2}-1}{\mathrm{e}^{2x-2}+1} = \frac{\mathrm{e}^{x-1}-\mathrm{e}^{-(x-1)}}{\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{-(x-1)}} = \mathrm{th}(x-1)$$

Question IV

i. Le système

$$\begin{cases} \left(\dfrac{ML^2}{9}+mr_*^2\right)\dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -mg\,\varepsilon \\ \\ m\dfrac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -mg\,\eta \end{cases}$$

est un système de deux équations différentielles linéaires à coefficients constants du deuxième ordre. Il est donc équivalent à une équation différentielle linéaire à coefficients constants du quatrième ordre qui peut être obtenue en éliminant l'une ou l'autre des deux variables.

La deuxième équation donne

$$\eta = -\frac{1}{g}\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \qquad (\spadesuit)$$

et, en dérivant successivement deux fois par rapport au temps,

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{1}{g}\frac{d^4\varepsilon}{dt^4}$$

La première équation peut alors s'écrire

$$\left(\frac{ML^2}{9}+mr_*^2\right)\left(-\frac{1}{g}\frac{d^4\varepsilon}{dt^4}\right) = -mg\,\varepsilon$$

ou encore, sous forme canonique,

$$\frac{d^4\varepsilon}{dt^4} - \alpha^4\varepsilon = 0$$

où on a posé

$$\frac{mg^2}{\dfrac{ML^2}{9}+mr_*^2} = \alpha^4, \quad (\text{avec } \alpha > 0)$$

L'équation étant linéaire, homogène et à coefficients constants, on considère le polynôme caractéristique $L(z) = z^4 - \alpha^4$. Celui-ci admet les quatre zéros simples

$$\alpha, \quad -\alpha, \quad i\alpha \quad \text{et} \quad -i\alpha$$

La solution générale s'écrit alors

$$\varepsilon(t) = C_1 \mathrm{e}^{\alpha t} + C_2 \mathrm{e}^{-\alpha t} + C_3 \mathrm{e}^{i\alpha t} + C_4 \mathrm{e}^{-i\alpha t}$$

ou encore, sous forme réelle,

$$\varepsilon(t) = C_1 \mathrm{e}^{\alpha t} + C_2 \mathrm{e}^{-\alpha t} + C_3' \cos(\alpha t) + C_4' \sin(\alpha t)$$

où C_1, C_2, C_3' et C_4' sont des constantes.

Faisant usage de (♠), on obtient aussi

$$\begin{aligned}\eta &= -\frac{1}{g}\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \\ &= -\frac{1}{g}\left[\alpha^2 C_1 \mathrm{e}^{\alpha t} + \alpha^2 C_2 \mathrm{e}^{-\alpha t} - \alpha^2 C_3' \cos(\alpha t) - \alpha^2 C_4' \sin(\alpha t)\right]\end{aligned}$$

ii. La présence d'une exponentielle croissante dans la solution générale du système indique que les perturbations ne seront pas bornées quelles que soient les conditions initiales. L'équilibre est donc instable.

Question V

i. Si $x = u \neq 0$, les relations

$$\begin{cases} u = x \\ v = xy \end{cases}$$

donnant u et v en fonction de x et y s'inversent en

$$\begin{cases} x = u \\ y = \dfrac{v}{u} \end{cases}$$

Elles établissent donc une bijection entre les ouverts

$$\Omega = \{(x,y) : x \neq 0\} \quad \text{et} \quad \Omega' = \{(u,v) : u \neq 0\}$$

De plus, les fonctions $u(x,y) = x$ et $v(x,y) = xy$ appartiennent à $C_\infty(\Omega) \subset C_1(\Omega)$ et

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{vmatrix} = x \neq 0 \quad \text{sur} \quad \Omega$$

En conclusion, les relations données définissent un changement de variables régulier, d'ordre infini (et donc aussi d'ordre 1) entre Ω et Ω'.

ii. Le théorème de dérivation des fonctions composées permet d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + y\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{v}{u}\frac{\partial}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v} = x\frac{\partial}{\partial v} = u\frac{\partial}{\partial v}$$

iii. En exploitant les relations définissant le changement de variables et les formules de transformation des dérivées, l'équation différentielle

$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = xy^2$$

peut s'écrire sous la forme

$$u\frac{\partial g}{\partial u} + v\frac{\partial g}{\partial v} - v\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{v^2}{u}$$

où on a noté $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. Après simplification, il vient

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{v^2}{u^2}$$

iv. En primitivant par rapport à u les deux membres de l'équation ci-dessus, on obtient

$$g(u,v) = \int \frac{v^2}{u^2}\, du = -\frac{v^2}{u} + h(v)$$

où $h(v)$ est une fonction de v.

La solution générale de l'équation initiale exprimée en fonction des variables x et y s'écrit donc sous la forme

$$f(x,y) = -xy^2 + F(xy).$$

où F désigne une fonction (dérivable) quelconque d'une seule variable.