LIÈGE université
Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2018

MATH0002-4 - Analyse Mathématique 1
Examen

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Les calculatrices sont interdites pour cet examen.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles votre ***numéro d'ordre****, votre nom de famille (en majuscules) et votre prénom.*
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Définissez mathématiquement $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

ii. Si f est dérivable et strictement décroissante en x_0, peut-on en déduire que $f'(x_0) < 0$? Répondez par vrai ou faux et justifiez.

iii. Les fonctions $|x|\,\mathrm{e}^{-x}$ et $|x|^2\,\mathrm{e}^{-x}$ sont-elles linéairement indépendantes sur $[-1,1]$? Justifiez.

iv. Définissez mathématiquement le concept de changement de variables régulier d'ordre 3 entre deux ouverts Ω et Ω' de $\mathbb{R}^2$. Précisez les différents éléments intervenant dans cette définition en faisant apparaître explicitement les différentes variables.

v. Exprimez en français l'égalité
$$\nabla \wedge (\phi \mathbf{f}) = \nabla\phi \wedge \mathbf{f} + \phi \nabla \wedge \mathbf{f}$$
puis démontrez cette formule.

Question II

On considère l'équation
$$\alpha x = \operatorname{arctg} x$$
où α désigne un paramètre réel.

i. Déterminez toutes les valeurs de α pour lesquelles l'équation admet une solution x strictement positive (en plus d'éventuelles autres solutions).

ii. Déterminez le plus grand intervalle dans lequel la fonction $\operatorname{arctg} x$ vérifie les hypothèses du théorème de Taylor permettant d'approcher cette fonction par un polynôme $\mathcal{P}_2$ d'ordre deux au voisinage de $x = 1$. Calculez $\mathcal{P}_2$ et donnez l'expression du reste $\mathcal{R}_2$ correspondant.

iii. Déterminez une majoration de l'erreur $\mathcal{R}_2$ en fonction de x valable pour $x \in [0.8, 1]$.

iv. Remplaçant la fonction arctg par son approximation $\mathcal{P}_2$ dans l'équation à résoudre et considérant la valeur particulière $\alpha = 4/5$, déterminez une solution approchée $\tilde{x} > 0$ de l'équation considérée.

v. L'erreur $\mathcal{R}_2(\tilde{x})$ constitue-t-elle une estimation de l'erreur associée à la solution approchée $\tilde{x}$ établie au point précédent ? Justifiez.

Tournez la page.

Question III

Par le biais d'un amortisseur, on désire soustraire un système de masse m des vibrations induites par le mouvement du support sur lequel il est placé. La dynamique du système étudié est décrite par l'équation différentielle

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k\big[x(t) - \ell\big] = -mg + m\ddot{y}(t) \qquad \text{où} \quad (\dot{\ }) = \frac{d}{dt}(\ ), \quad (\ddot{\ }) = \frac{d^2}{dt^2}(\ ),$$

où $x(t)$ décrit le mouvement vertical du système et où m, c, k, ℓ et g sont des constantes strictement positives désignant respectivement la masse, la constante d'amortissement, la raideur et la longueur de référence du ressort et l'accélération de la pesanteur. La fonction $y(t)$ décrit le mouvement vertical du support.

i. Établissez la loi du mouvement $x(t)$ en considérant m=1 kg, c = 4 kg/s, k = 5 kg/s^2, g = 10 m/s^2, ℓ=1 m et $y(t) = \sin\omega t$ avec ω=1 rad/s.
   On supposera que le système est initialement au repos ($\dot{x}(0) = 0$) en $x(0) = \ell$.
   N.B. Aucune conversion d'unités ne doit être effectuée.
ii. Dans le cas général, déterminez les conditions éventuelles sur les paramètres m, c, k et ℓ de l'amortisseur pour que sa réponse libre, obtenue pour $y(t) = 0$, soit asymptotique à une constante $x_\infty \neq 0$ pour $t \to \infty$ quelles que soient les conditions initiales considérées. Déterminez la valeur de x_∞.

Question IV

Parmi toutes les solutions du système

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

déterminez celle dont la norme euclidienne $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est minimale

i. en procédant par élimination ;
ii. par la méthode du Lagrangien.

Calculez la valeur minimale de la norme et justifiez.

SOLUTION TYPE

Question I

i. On définit le concept de limite des valeurs d'une fonction par

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

$$\Updownarrow$$

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \operatorname{dom} f, 0 < |x-x_0| \leq \delta) : |f(x)-a| \leq \varepsilon$$

ii. FAUX, si f est dérivable et strictement décroissante en un point x_0, on ne peut en déduire que $f'(x_0) < 0$.
Il suffit de considérer le cas de la fonction $f(x) = -x^3$. Cette fonction est dérivable et strictement décroissante en $x = 0$ puisque

$$\forall x_1 < 0 < x_2 \quad : \quad f(x_1) > f(0) = 0 > f(x_2)$$

Cependant, $f'(0) = 0$.

iii. Pour examiner l'indépendance linéaire des fonctions $|x|\,\mathrm{e}^{-x}$ et $|x|^2\,\mathrm{e}^{-x}$ sur $[-1,1]$, on examine les conditions sous lesquelles

$$C_1|x|\,\mathrm{e}^{-x} + C_2|x|^2\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \qquad \forall x \in [-1,1]$$

Considérant cette expression pour $x = 1/2$ et $x = 1$, on a

$$\begin{cases} C_1\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1/2} + C_2\dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-1/2} = 0 \\ C_1\,\mathrm{e}^{-1} + C_2\,\mathrm{e}^{-1} = 0 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} 2C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

dont la seule solution est $C_1 = C_2 = 0$.
Dès lors

$$C_1|x|\,\mathrm{e}^{-x} + C_2|x|^2\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \forall x \in [-1,1] \qquad \Leftrightarrow \qquad C_1 = C_2 = 0$$

de sorte que les fonctions sont linéairement indépendantes sur $[-1,1]$.

De façon alternative, on peut démontrer l'indépendance linéaire des fonctions sur l'intervalle $]0,1]$ sur lequel celles-ci sont indéfiniment continûment dérivables et $|x| = x$ en formant leur Wronskien

$$\mathrm{W} = \begin{vmatrix} x\,\mathrm{e}^{-x} & x^2\,\mathrm{e}^{-x} \\ (1-x)\,\mathrm{e}^{-x} & x(2-x)\,\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = x^2(2-x-1+x)\,\mathrm{e}^{-2x} = x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$$

Le fait que W ne s'annule pas identiquement sur $]0,1]$ prouve l'indépendance linéaire des fonctions sur cet intervalle.
Les fonctions étant linéairement indépendantes sur $]0,1]$, elles le sont également sur tout intervalle contenant $]0,1]$, en particulier sur $[-1,1]$.

iv. On appelle *changement de variables régulier d'ordre* 3 dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ une application du type

$$(x',y') \in \Omega' \subset \mathbb{R}^2 \to (x,y) = (f(x',y'), g(x',y')) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

telle que

- l'équation $(x,y) = (f(x',y'), g(x',y'))$ admet une et une seule solution $(x',y') \in \Omega'$ quel que soit (x,y) fixé dans Ω (bijectivité);

- $f, g \in C_3(\Omega')$;
- $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x'} & \dfrac{\partial f}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x'} & \dfrac{\partial g}{\partial y'} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{sur} \quad \Omega'.$

v. La relation

$$\nabla \wedge (\phi \mathbf{f}) = \nabla\phi \wedge \mathbf{f} + \phi \nabla \wedge \mathbf{f}$$

peut être énoncée en disant que “*le rotationnel du produit du champ scalaire* ϕ *et du champ vectoriel* $\mathbf{f}$ *est égal au produit vectoriel du gradient de* ϕ *et de* $\mathbf{f}$ *augmenté du produit de* ϕ *et du rotationnel de* $\mathbf{f}$.”

Les définitions du gradient et du rotationnel se traduisent par

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

et

$$\nabla \wedge \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

Puisque le produit vectoriel de deux vecteurs **a** et **b** peut être exprimé sous la forme

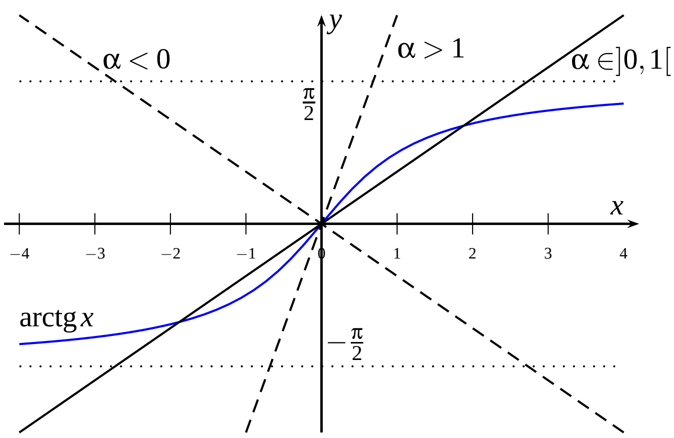
$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{e}_z$$

il vient dès lors

$$\begin{aligned}
\nabla\phi \wedge \mathbf{f} + \phi\nabla \wedge \mathbf{f} &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} f_z - \frac{\partial\phi}{\partial z} f_y\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} f_x - \frac{\partial\phi}{\partial x} f_z\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} f_y - \frac{\partial\phi}{\partial y} f_x\right)\mathbf{e}_z \\
&\quad + \phi\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \phi\left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \phi\left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z \\
&= \left(\frac{\partial(\phi f_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\phi f_y)}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial(\phi f_x)}{\partial z} - \frac{\partial(\phi f_z)}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial(\phi f_y)}{\partial x} - \frac{\partial(\phi f_x)}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z \\
&= \nabla \wedge (\phi\mathbf{f})
\end{aligned}$$

Question II

i. Les solutions de l’équation $\alpha x = \operatorname{arctg} x$ correspondent à l’intersection du graphique de la fonction $\operatorname{arctg} x$ et de la droite αx.



Dans le cas où $\alpha < 0$, l'équation ne possède pas de solution strictement positive puisque $\operatorname{arctg} x$ et αx sont alors de signes opposés sur $]0,+\infty[$. De même, on peut exclure le cas $\alpha = 0$.

Il ne peut exister de solution strictement positive à l'équation dans le cas où $\alpha \geq 1$. En effet, dans ce cas, la pente de la droite est supérieure ou égale à la pente de la fonction arctg à l'origine,

$$\left.\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=0} = 1$$

Puisque la pente de la fonction arctg décroit pour $x > 0$ croissant, les graphiques des deux fonction ne peuvent se croiser sur $]0,+\infty[$.

Dans le cas où $\alpha \in]0,1[$, par contre, le graphique de $\operatorname{arctg} x$ est situé au-dessus de la droite αx au voisinage de l'origine et en-dessous du graphique de αx pour x grand (compte tenu de l'asymptote horizontale de la fonction arctg). Les deux fonctions étant continues, il existe un point d'abscisse $x_0 \in]0,+\infty[$ où les deux courbes se croisent.

ii. La fonction arctg étant réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer la formule de Taylor à l'ordre 2 en $a = 1$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

En effet, la fonction vérifie alors les hypothèses de la formule de Taylor puisqu'elle est réelle, 2 fois continûment dérivable sur $[1,x]$ (ou $[x,1]$) et 3 fois dérivable sur $]1,x[$ (ou $]x,1[$).

La formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction $f(x) = \operatorname{arctg} x$ s'écrit

$$f(x) = \mathcal{P}_2(x) + \mathcal{R}_2(x)$$

où

$$\mathcal{P}_2(x) = f(1) + \frac{(x-1)}{1!} f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!} f''(1)$$

et

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{(x-1)^3}{3!} f^{(3)}(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi \in]1,x[\quad (\text{ou }]x,1[)$$

D'une part, il vient successivement

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{arctg} x & \qquad f(1) &= \frac{\pi}{4} \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} & f'(1) &= \frac{1}{2} \\ f''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} & f''(1) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathcal{P}_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4}$$

D'autre part, on calcule également

$$f'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

de sorte que le reste peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{R}_2(x) = \frac{(x-1)^3}{6} \frac{6\xi^2-2}{(1+\xi^2)^3} \quad \text{avec} \quad \xi \in]1,x[\quad (\text{ou } \xi \in]x,1[)$$

iii. Si $x \in [0.8,1]$, $\xi \in]x,1[\subset [0.8,1]$ et

$$|f'''(\xi)| = f'''(\xi) = \frac{6\xi^2-2}{(1+\xi^2)^3} \leq \frac{6(1)^2-2}{(1+x^2)^3} = \frac{4}{(1+x^2)^3}$$

Le reste $\mathcal{R}_2$ peut donc être majoré selon

$$|\mathcal{R}_2(x)| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{|x-1|}{1+x^2}\right)^3 = \frac{2}{3}\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^3$$

iv. L'équation approchée à résoudre est

$$\frac{4}{5}x = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4}$$

soit

$$5x^2 - 4x + 5(3-\pi) = 0$$

qui admet comme solutions

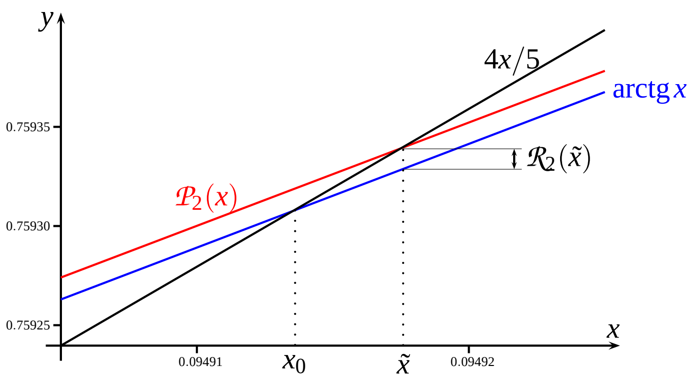
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{25\pi - 71}}{5}$$

La solution approchée positive recherchée est donc

$$\tilde{x} = \frac{2 + \sqrt{25\pi - 71}}{5}$$

v. Non, l'erreur $\mathcal{R}_2(\tilde{x})$ ne constitue pas une estimation de l'erreur sur la solution de l'équation considérée. $\mathcal{R}_2(\tilde{x})$ mesure l'écart entre $\operatorname{arctg}\tilde{x}$ et $4\tilde{x}/5$, pas entre $\tilde{x}$ et la solution exacte x_0 de l'équation proposée.

Comme le montre la figure ci-dessous, $\mathcal{R}_2$ mesure une erreur sur l'axe vertical alors que la différence $\tilde{x} - x_0$ doit être mesurée horizontalement.



Question III

i. Dans le cas particulier considéré, l'équation différentielle s'écrit

$$\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 5\left[x(t) - 1\right] = -10 + \ddot{y}(t)$$

où

$$\ddot{y}(t) = \frac{d^2}{dt^2}(\sin t) = -\sin t$$

soit, sous forme canonique,

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = -5 - \sin t$$

L'équation différentielle à résoudre est linéaire et non homogène. Sa solution générale $x(t)$ est donc la somme de la solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $x_p(t)$ de l'équation non homogène.

Solution générale de l'équation homogène.

L'équation étant linéaire à coefficients constants, nous considérons le polynôme caractéristique associé z^2+4z+5 dont les zéros sont les complexes conjugués

$$z_{1,2} = -2 \pm i$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit alors

$$x_h(t) = \mathrm{e}^{-2t}(A\cos t + B\sin t)$$

où A et B sont des constantes.

Solution particulière de l'équation non homogène.

Le second membre peut s'écrire

$$-5-\sin t = f_1(t)+f_2(t) \quad \text{avec} \quad f_1(t) = -5 \quad \text{et} \quad f_2(t) = -\sin t$$

Comme l'équation est linéaire, on peut rechercher une solution particulière de la forme

$$x_p(t) = x_{p1}(t) + x_{p2}(t)$$

où $x_{pi}(t)$ est une solution particulière de

$$\ddot{x}+4\dot{x}+5x = f_i(t), \qquad i \in \{1,2\}$$

- Par simple inspection, on constate que $x_{p1} = -1$ est une solution de

  $$\ddot{x}+4\dot{x}+5x = -5$$

- Puisque i n'est pas un zéro du polynôme caractéristique de l'équation homogène, nous pouvons rechercher une solution particulière de

  $$\ddot{x}+4\dot{x}+5x = -\sin t$$

  de la forme

  $$x_{p2}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t$$

  où C_1 et C_2 sont des constantes. On calcule successivement

  $$\dot{x}_{p2}(t) = -C_1\sin t + C_2\cos t$$

  et

  $$\ddot{x}_{p2}(t) = -C_1\cos t - C_2\sin t$$

  Substituant ces expressions dans l'équation non homogène correspondante, il vient

  $$-C_1\cos t - C_2\sin t + 4(-C_1\sin t + C_2\cos t) + 5(C_1\cos t + C_2\sin t) = -\sin t$$

  En identifiant les coefficients des fonctions cosinus et sinus, on obtient

  $$\begin{cases} 4(C_1+C_2) = 0 \\ 4(C_2-C_1) = -1 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad C_1 = -C_2 = \frac{1}{8}$$

  de sorte que

  $$x_{p2}(t) = \frac{1}{8}(\cos t - \sin t)$$

  On a donc identifié la solution particulière

  $$x_p(t) = x_{p1}(t) + x_{p2}(t) = -1 + \frac{1}{8}(\cos t - \sin t)$$

Solution générale de l'équation non homogène.

La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$x(t) = \mathrm{e}^{-2t}(A\cos t + B\sin t) - 1 + \frac{1}{8}(\cos t - \sin t)$$

Solution du problème.

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes A et B.
En dérivant la solution générale, on obtient

$$\dot{x}(t) = -2\,\mathrm{e}^{-2t}(A\cos t + B\sin t) + \mathrm{e}^{-2t}(-A\sin t + B\cos t) + \frac{1}{8}(-\sin t - \cos t)$$

de sorte que

$$\begin{cases} 1 = x(0) = A - 1 + \dfrac{1}{8} \\ 0 = \dot{x}(0) = -2A + B - \dfrac{1}{8} \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{15}{8} \\ B = \dfrac{31}{8} \end{cases}$$

Finalement, la solution du problème différentiel s'écrit

$$x(t) = \mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{15}{8}\cos t + \frac{31}{8}\sin t\right) - 1 + \frac{1}{8}(\cos t - \sin t)$$

ii. Dans le cas de la réponse libre, l'équation décrivant le mouvement s'écrit

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = k\ell - mg$$

Elle est encore linéaire et non homogène. Sa solution générale $x(t)$ est donc la somme de la solution générale $x_h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $x_p(t)$ de l'équation non homogène.

Par simple inspection, on constate que

$$x_p = \frac{k\ell - mg}{k}$$

est une solution particulière quelles que soient les valeurs des paramètres de sorte que

$$x(t) = x_h(t) + \ell - \frac{mg}{k}$$

L'équation homogène étant linéaire à coefficients constants, sa solution générale peut être obtenue en considérant les zéros du polynôme caractéristique, *i.e.* les solutions de

$$mz^2 + cz + k = 0$$

Une discussion doit donc être menée suivant les valeurs prises par le réalisant

$$\rho = c^2 - 4km$$

- $\rho = 0$

  Ce cas se produit si $c^2 = 4km$. Dans ce cas, le polynôme caractéristique possède le zéro double réel négatif $z_{1,2} = -c/2m$ et la solution générale de l'équation homogène s'écrit

$$x_h(t) = (At + B)\,\mathrm{e}^{-\dfrac{ct}{2m}}$$

  où A et B sont des constantes.

- $\rho < 0$

  Ce cas se produit si $c^2 < 4km$. Dans ce cas, le polynôme caractéristique possède les deux zéros complexes conjugués

$$z_{1,2} = \frac{-c \pm i\sqrt{4km - c^2}}{2m}$$

  et la solution générale de l'équation homogène s'écrit

$$x_h(t) = \mathrm{e}^{-\dfrac{ct}{2m}} \left(A\cos\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}\,t + B\sin\frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}\,t \right)$$

  où A et B sont des constantes.

- $\rho > 0$

  Ce cas se produit si $c^2 > 4km$. Dans ce cas, le polynôme caractéristique possède les deux zéros réels négatifs

$$z_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}$$

  et la solution générale de l'équation homogène s'écrit

$$x_h(t) = A\,\mathrm{e}^{z_1 t} + B\,\mathrm{e}^{z_2 t}$$

  où A et B sont des constantes.

Dans les trois cas,les exponentielles d'argument négatif assurent que

$$\lim_{t \to +\infty} x_h(t) = 0$$

de sorte que

$$x_\infty = \lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(x_h(t) + \ell - \frac{mg}{k} \right) = \ell - \frac{mg}{k}$$

Pour toutes les valeurs des paramètres telles que $mg \neq k\ell$, on a donc

$$x(t) \sim \ell - \frac{mg}{k} \neq 0, \quad (t \to +\infty)$$

Question IV

Le problème posé est un problème d'optimisation avec deux contraintes d'égalité qui peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{P} \left| \begin{array}{l} \displaystyle\min_{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3} \ \tilde{f}(\mathrm{x}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \text{s.c. } \ g_1(\mathrm{x}) = x + 2y + z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad g_2(\mathrm{x}) = x + y - 2 = 0 \end{array} \right.$$

Remarquons tout d'abord que ce problème possède une solution. En effet, il peut être interprété géométriquement comme la recherche de la distance à l'origine de la droite située à l'intersection des deux plans non parallèles correspondant aux équations du système.

Le minimum des fonctions $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et $x^2+y^2+z^2$ étant obtenu au même point, le problème posé se simplifie en

$$\mathcal{P}\ \left|\begin{array}{l}\displaystyle\min_{\mathsf{x}\in\mathbb{R}^3}\ f(\mathsf{x}) = x^2+y^2+z^2 \\ \text{s.c. } g_1(\mathsf{x}) = x+2y+z-1 = 0 \quad \text{et} \quad g_2(\mathsf{x}) = x+y-2 = 0\end{array}\right.$$

i. Les deux contraintes linéaires permettent d'éliminer les variables y et z selon

$$y = 2-x \quad \text{et} \quad z = 1-x-2(2-x) = x-3$$

ce qui donne

$$F(x) = f(x,2-x,x-3) = x^2+(2-x)^2+(x-3)^2 = 3x^2-10x+13$$

Puisque la fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, le minimum recherché se trouve parmi les points stationnaires de F. Ceux-ci vérifient

$$F'(x) = 6x-10 = 0$$

Il y a donc un seul point stationnaire, $x = 5/3$.

Ce point correspond bien à un minimum de la fonction f puisque $f''(5/3) = 6 > 0$.
La solution de norme minimale du système linéaire donné est donc

$$\mathsf{x} = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

et la norme correspondante vaut

$$\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

ii. Les fonctions f, g_1 et g_2 sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^3$ et donc différentiables. De plus, on peut construire la matrice

$$\mathsf{G} = \begin{pmatrix}\nabla g_1(\mathsf{x}) & \nabla g_2(\mathsf{x})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial g_1}{\partial z} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

dont le rang est égal à 2 et est maximum, ce qui garantit que les gradients des contraintes sont linéairement indépendants.
On en déduit que le minimum à identifier peut être recherché parmi les points stationnaires du Lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2+y^2+z^2-\lambda_1(x+2y+z-1)-\lambda_2(x+y-2)$$

Ces points stationnaires sont les solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 1 - x - 2y - z = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2 - x - y = 0 \end{cases}$$

En exploitant la troisième et la deuxième de ces équations, on obtient

$$\lambda_1 = 2z \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 2y - 4z$$

ce qui conduit, en injectant ces résultats dans la première équation, au système de 3 équations à 3 inconnues

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Soustrayant membre à membre les deux premières équations, on obtient

$$-3y = -1 \qquad \text{soit} \qquad y = \frac{1}{3}$$

Substituant cette valeur dans la troisième équation, on trouve alors

$$x = 2 - y = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

De la première équation, on tire enfin

$$z = -x + y = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

de sorte que la solution s'écrit

$$\mathrm{x} = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

Puisque la solution de norme minimale existe et que le Lagrangien ne possède qu'un seul point stationnaire, celui-ci correspond à la solution de norme minimale recherchée (déjà déterminée en i.)