Université de Liège

Prof. Éric J.M.DELHEZ

Janvier 2017

MATH0002-4 - ANALYSE MATHÉMATIQUE
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom, section et numéro d'ordre.
Les calculatrices de toutes sortes sont interdites.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

On considère la fonction

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{1+t}$$

i. Déterminez le plus grand intervalle $\mathtt{I}$ contenant l'origine sur lequel f vérifie les hypothèses de la formule de MacLaurin à l'ordre 1. Justifiez en énonçant explicitement les hypothèses du théorème tel qu'il est utilisé.

ii. Exploitez la formule de MacLaurin pour exprimer f sur $\mathtt{I}$ sous la forme

$$f(t) = \mathcal{P}_1(t) + \mathcal{R}_1(t)$$

où $\mathcal{P}_1(t)$ est un polynôme de degré 1 en t et où $\mathcal{R}_1(t)$ est le reste correspondant.

iii. En étudiant $\mathcal{R}_1(t)$, déterminez une borne de l'erreur absolue maximale commise en remplaçant $f(t)$ par $\mathcal{P}_1(t)$ sur l'intervalle $[0, 0.1]$.

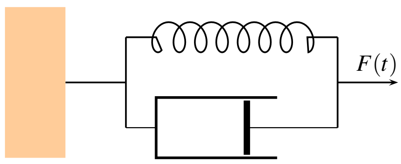
iv. Exploitez les résultats obtenus pour déterminer une valeur numérique approchée de

$$I = \int_0^{0.1} \frac{e^{-t}}{1+t} dt$$

et une borne de l'erreur associée.

Question II

Le comportement visco-élastique d'un matériau peut être décrit par le modèle mécanique équivalent ci-contre comportant un ressort et un amortisseur en parallèle. Lorsqu'on applique une force de traction F sur un tel matériau, la résistance opposée à la déformation dépend de l'amplitude de la déformation (partie élastique de la réponse) et de la vitesse à laquelle celle-ci se produit (partie visqueuse de la réponse).



On considère la déformation $y(t)$ d'un tel matériau en fonction du temps t décrite par

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = F(t)$$

où $F(t)$ désigne la force appliquée et où on a noté $\dfrac{dy}{dt} = \dot{y}$ et $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$.

i. Déterminez la déformation $y(t)$ du matériau pour $t \geq 0$ dans le cas où on applique une force $F(t) = F_0 e^{-t}$ (où $F_0 > 0$ est une constante) à partir de l'état de repos, *i.e.* $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = 0$.

ii. Dans le cas où les conditions initiales sont quelconques et où

$$F(t) = \frac{F_0 e^{-t}}{1+t}$$

(a) discutez l'existence et l'unicité de la solution du problème différentiel ;

(b) déterminez une solution particulière de l'équation différentielle valable pour $t \geq 0$ et s'annulant en $t = 0$. Une telle solution ne peut s'exprimer complètement en terme de fonctions habituelles mais comporte une partie intégrale.

Question III

On modélise la satisfaction d'un consommateur consommant trois types de biens par la fonction

$$f(x,y,z) = x\,y^2 z^5$$

où x, y et z désignent les quantités des trois biens exprimées dans des unités appropriées. Sachant que les prix unitaires des trois biens sont respectivement de 10 €, 20 € et 100 € et que le consommateur dispose d'un budget de 1000 €, déterminez les quantités de chaque bien permettant de maximiser sa satisfaction. Justifiez.

Question IV

En électrostatique, le champ électrique $\mathbf{E}$ créé par une distribution quelconque de charges est lié au potentiel électrique V par la relation

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

i. Montrez par le calcul que, sous certaines conditions à déterminer, le champ électrique $\mathbf{E}$ est irrotationnel, *i.e.* que $\nabla \wedge \mathbf{E} = \mathbf{0}$.

ii. Dans le cas où V est différentiable, montrez que la dérivée directionnelle de V dans toute direction $\mathbf{d}$ perpendiculaire au champ électrique est nulle.

iii. Un fil rectiligne infini (de rayon négligeable) disposé sur l'axe OZ et portant une charge par unité de longueur λ crée en tout point P situé en dehors de l'axe OZ un potentiel électrique donné par

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

où ε_0 et r_0 sont des constantes strictement positives.

(a) Calculez l'expression du champ électrique $\mathbf{E}$ en coordonnées cartésiennes en dehors de l'axe OZ.

(b) Calculez ΔV en dehors de l'axe OZ.

(c) Déterminez l'expression du champ électrique $\mathbf{E}$ en coordonnées cylindriques en dehors de l'axe OZ.

Question I

i. La fonction f est réelle et indéfiniment continûment dérivable sur $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$. Le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel elle vérifie les hypothèses du développement de MacLaurin à l'ordre 1 est donc $]-1,+\infty[$.

   Les hypothèses de la formule de Taylor/McLaurin à l'ordre 1 sont en effet les suivantes :
   - f réelle,
   - f continûment dérivable sur $[0,t]$ (ou $[t,0]$),
   - f deux fois dérivable sur $]0,t[$ (ou $]t,0[$).

ii. La formule de McLaurin à l'ordre 1 s'écrit, pour tout $t \in]-1,+\infty[$,

$$f(t) = \mathcal{P}_1(t) + \mathcal{R}_1(t)$$

où

$$\mathcal{P}_1(t) = f(0) + f'(0)\,t \qquad \text{et} \qquad \mathcal{R}_1(t) = \frac{f''(\theta t)}{2}\,t^2 \quad \text{avec} \quad \theta \in]0,1[$$

On calcule successivement

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{1+t} \qquad\qquad f(0) = 1$$

$$f'(t) = \frac{-e^{-t}(1+t) - e^{-t}}{(1+t)^2} = -\frac{e^{-t}(2+t)}{(1+t)^2} \qquad\qquad f'(0) = -2$$

et

$$\begin{aligned} f''(t) &= -\frac{\left[-e^{-t}(2+t) + e^{-t}\right](1+t)^2 - e^{-t}(2+t)2(1+t)}{(1+t)^4} \\ &= \frac{e^{-t}\left(t^2+4t+5\right)}{(1+t)^3} \end{aligned}$$

Dès lors

$$\mathcal{P}_1(t) = 1 - 2t$$

$$\mathcal{R}_1(t) = \frac{e^{-\theta t}\left[(\theta t)^2 + 4(\theta t) + 5\right]}{2(1+\theta t)^3}\,t^2 \qquad \text{avec} \quad \theta \in]0,1[$$

iii. D'une part, le trinôme t^2+4t+5 apparaissant dans la dérivée seconde de f est toujours positif et croissant sur $[0,0.1]$ (somme de termes positifs), de sorte que

$$(\theta t)^2 + 4(\theta t) + 5 < (0.1)^2 + 4(0.1) + 5 = 5.41, \qquad \forall t \in [0,0.1],\ \forall \theta \in]0,1[$$

D'autre part, les fonctions e^{-t} et $(1+t)^{-3}$ sont positives et décroissantes sur $[0,0.1]$, de sorte que

$$\begin{cases} e^{-\theta t} < e^0 = 1 \\ \dfrac{1}{(1+\theta t)^3} < \dfrac{1}{(1+0)^3} = 1 \end{cases} \qquad \forall t \in [0,0.1],\ \forall \theta \in]0,1[$$

Il en résulte que

$$|\mathcal{R}_1(t)| = \mathcal{R}_1(t) < \frac{5.41}{2}\,(0.1)^2 = 0.02705,\ \forall t \in [0,0.1] \qquad (\spadesuit)$$

iv. Les développements qui précèdent permettent d'écrire I sous la forme

$$I = \int_0^{0.1} [\mathcal{P}_1(t) + \mathcal{R}_1(t)]\, dt$$

Une valeur approchée de I est donc donnée par

$$\int_0^{0.1} \mathcal{P}_1(t)\, dt = \int_0^{0.1} [1-2t]\, dt = \left[t - t^2\right]_0^{0.1} = 0.1 - 0.01 = 0.09$$

L'erreur commise est donnée par

$$\varepsilon = \int_0^{0.1} \mathcal{R}_1(t)\, dt$$

En vertu de (♠), elle peut être majorée selon

$$|\varepsilon| \leq \int_0^{0.1} |\mathcal{R}_1(t)|\, dt \leq \int_0^{0.1} 0.02705\, dt = 0.02705 \cdot 0.1 = 0.002705$$

Remarquons qu'on peut obtenir une meilleure précision dans la majoration de l'erreur en notant que les développements réalisés au point iii. permettent aussi d'écrire

$$|\mathcal{R}_1(t)| < \frac{5.41}{2}\, t^2 \qquad \forall t \in [0, 0.1]$$

ce qui conduit à

$$|\varepsilon| \leq \int_0^{0.1} |\mathcal{R}_1(t)|\, dt < 2.705 \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{0.1} = \frac{0.002705}{3} < 0.00091$$

Question II

i. Comme l'équation différentielle est linéaire et non homogène, sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation non homogène.

L'équation étant à coefficients constants, on trouve la solution générale de l'équation homogène associée à l'aide de l'équation caractéristique

$$z^2 + 3z + 2 = 0$$

Les zéros du polynôme caractéristique sont $z = -1$ et $z = -2$ et sont de multiplicité 1. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y_h(t) = A\,\mathrm{e}^{-t} + B\,\mathrm{e}^{-2t}$$

où A et B sont deux constantes.

Le second membre de l'équation non homogène $F(t) = F_0\,\mathrm{e}^{-t}$ est une exponentielle polynôme $P_p(t)\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ où $P_p(t)$ est une constante et $\lambda = -1$ est un zéro simple du polynôme caractéristique. On peut donc chercher une solution du type $y_p(t) = \gamma\, t\,\mathrm{e}^{-t}$ où γ désigne une constante à déterminer. On calcule successivement

$$\dot{y}_p(t) = \gamma(1-t)\,\mathrm{e}^{-t}$$
$$\ddot{y}_p(t) = \gamma(t-2)\,\mathrm{e}^{-t}$$

Substituant ces expressions dans l'équation non homogène, on obtient

$$\gamma\,(t-2)\,\mathrm{e}^{-t} + 3\gamma\,(1-t)\,\mathrm{e}^{-t} + 2\gamma\,t\,\mathrm{e}^{-t} = \gamma\mathrm{e}^{-t} = F_0\,\mathrm{e}^{-t}$$

On en déduit que $\gamma = F_0$ et que l'équation possède la solution particulière

$$y_p(t) = F_0\,t\,\mathrm{e}^{-t}$$

La solution générale de l'équation non homogène est

$$y(t) = F_0\,t\,\mathrm{e}^{-t} + A\,\mathrm{e}^{-t} + B\,\mathrm{e}^{-2t}$$

On détermine les constantes à l'aide des conditions initiales.
Comme

$$\dot{y}(t) = F_0(1-t)\,\mathrm{e}^{-t} - A\,\mathrm{e}^{t} - 2B\,\mathrm{e}^{-t},$$

on a

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} A + B = 0 \\ F_0 - A - 2B = 0 \end{cases}$$

La solution de ce système d'équations est donnée par

$$\begin{cases} A = -F_0 \\ B = F_0 \end{cases}$$

La solution du problème différentiel est donc

$$y(t) = F_0(t-1)\,\mathrm{e}^{-t} + F_0\,\mathrm{e}^{-2t}$$

ii. (a) Puisque

$$F(t) = \frac{F_0\,\mathrm{e}^{-t}}{1+t} \in C_0(]-1,+\infty[)$$

on déduit du théorème d'existence et d'unicité des solutions des problèmes différentiels linéaires que l'équation

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = F(t)$$

admet des solutions deux fois continûment dérivables sur $]-1,+\infty[$.
Ces solutions peuvent s'exprimer en fonction de deux constantes d'intégration arbitraires. Les constantes peuvent être déterminées si des conditions de Cauchy sont associées à l'équation. Dans ce cas, la solution est unique.

(b) Le second membre n'est pas de la forme exponentielle-polynôme comme en i. Nous devons donc chercher une solution particulière par la méthode de variation des constantes.
Les fonctions $y_1(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $y_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ constituant un système fondamental de solutions de l'équation homogène, on forme le système

$$\begin{cases} C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t) = 0 \\[2ex] C_1(t)\dot{y}_1(t) + C_2(t)\dot{y}_2(t) = \dfrac{F_0\,\mathrm{e}^{-t}}{1+t} \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} C_1(t) + C_2(t)\,\mathrm{e}^{-t} = 0 \\[2ex] C_1(t) + 2C_2(t)\,\mathrm{e}^{-t} = -\dfrac{F_0}{1+t} \end{cases}$$

La solution (unique)

$$\begin{cases} C_1(t) = \dfrac{F_0}{1+t} \\[2ex] C_2(t) = \dfrac{-F_0\,\mathrm{e}^{t}}{1+t} \end{cases}$$

de ce système permet d'exprimer des solutions particulières sous la forme

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \left(\int C_1(t)dt\right) \mathrm{e}^{-t} + \left(\int C_2(t)dt\right) \mathrm{e}^{-2t} \\ &= \left(\int \frac{F_0}{1+t}dt\right) \mathrm{e}^{-t} + \left(\int \frac{-F_0\,\mathrm{e}^t}{1+t}dt\right) \mathrm{e}^{-2t} \end{aligned}$$

La première primitive peut être calculée explicitement. Puisque $t > -1$, on a

$$\int C_1(t)dt = \int \frac{F_0}{1+t}dt = F_0 \ln(1+t) + C$$

où C désigne une constante d'intégration. Par contre, la seconde primitive ne peut s'exprimer au moyen de fonctions habituelles.
Choisissant les primitives qui s'annulent en $t = 0$, il vient

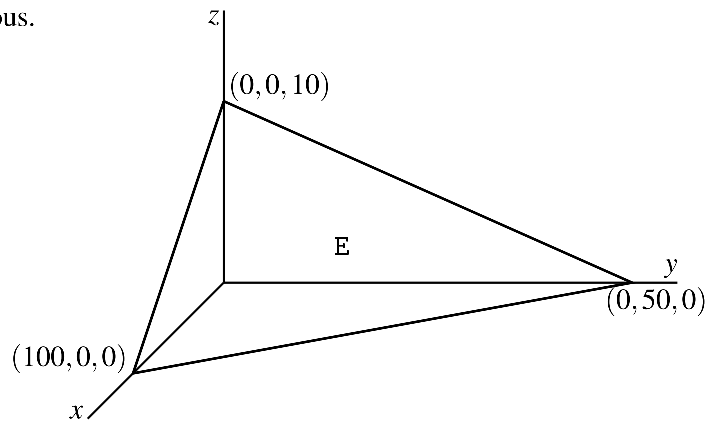
$$y_p(t) = F_0 \ln(1+t)\,\mathrm{e}^{-t} - F_0\,\mathrm{e}^{-2t} \int_0^t \frac{\mathrm{e}^\tau}{1+\tau} d\tau$$

Question III

Tenant compte des prix unitaires des trois biens et du budget, le prix à payer pour les trois biens est donné par $10x + 20y + 100z$ et le problème revient à maximiser $f = x\,y^2\,z^5$ sur le domaine admissible

$$\mathtt{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x,y,z \geq 0,\ 10x + 20y + 100z \leq 1000\right\}$$

esquissé ci-dessous.



Comme la fonction f est continue sur E qui est compact, elle réalise nécessairement sa borne supérieure sur ce compact et donc le maximum cherché existe. De plus, puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}^3$, ce maximum se trouve nécessairement

a) soit parmi les points stationnaires de f ;

b) soit parmi les points frontières de E.

a) Étude des points stationnaires de f.

Les points stationnaires de f sont les solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 z^5 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^5 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 5xy^2 z^4 = 0 \end{cases}$$

Les solutions requièrent l'annulation de la quantité y et/ou de la quantité z de sorte que les points stationnaires se trouvent sur la frontière de $\mathtt{E}$. La nature de ceux-ci est examinée au point b) ci-dessous. À ce stade, nous pouvons simplement conclure que le maximum recherché n'appartient pas à l'intérieur de $\mathtt{E}$ mais à la frontière de cet ensemble admissible.

Cette conclusion (partielle) aurait également pu être tirée en remarquant que la fonction de satisfaction f est une fonction croissante de ses trois variables. La satisfaction maximale ne peut donc être atteinte en un point intérieur de $\mathtt{E}$ puisque, en partant d'un tel point, il est possible d'augmenter la valeur de f en augmentant la quantité achetée d'un ou plusieurs biens.

b) Étude des points frontières.

La frontière de E est constituée de parties triangulaires des 4 plans d'équations cartésiennes

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{et} \quad 10x + 20y + 100z = 1000.$$

Sur les trois premières parties, la satisfaction f est nulle alors qu'elle est strictement positive à l'intérieur de $\mathtt{E}$. La fonction f réalise donc son minimum sur ces trois plans. Le maximum recherché se trouve quant à lui sur le quatrième plan.

Sur ce quatrième plan, on a $x = 100 - 2y - 10z$. La fonction de satisfaction prend les valeurs

$$f(100 - 2y - 10z, y, z) = (100 - 2y - 10z)y^2z^5 = h(y, z)$$

et s'exprime au moyen d'une fonction de deux variables $h \in C_\infty(\mathbb{R}^2)$.

Le maximum de h doit être recherché sur la projection de $\mathtt{E}$ sur le plan Oyz, soit sur

$$\mathtt{E}_x = \left\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, z \geq 0, 100 - 2y - 10z \geq 0\right\}$$

Ce maximum ne peut appartenir à la frontière de $\mathtt{E}_x$ puisque h (et donc f) y est nulle. Le maximum recherché correspond donc à un point stationnaire de h. On considère dès lors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial y} = -2y^2z^5 + (100 - 2y - 10z)2yz^5 = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial z} = -10y^2z^5 + (100 - 2y - 10z)5y^2z^4 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} y = \dfrac{25}{2} \\ z = \dfrac{25}{4} \end{cases}$$

Pour ces valeurs de y et z, on trouve $x = 100 - 2y - 10z = 25/2$ et

$$\left(\frac{25}{2}, \frac{25}{2}, \frac{25}{4}\right) \in \mathtt{E} \qquad \text{avec} \qquad f(x, y, z) = \frac{5^{16}}{2^{13}} > 0$$

Ce point étant admissible et étant le seul point stationnaire de h, on en conclut, conformément à la discussion précédente, qu'il correspond à la satisfaction maximale du consommateur.

On peut vérifier, mais ceci n'est pas nécessaire compte tenu de l'argumentaire ci-dessus, que la matrice hessienne de h est définie négative en $(25/2, 25/4)$.

Méthode alternative

La recherche du maximum de f sur le plan $g(x, y, z) = 0$ où $g(x, y, z) = 10x + 20y + 100z - 1000$ constitue un problème d'optimisation avec contrainte. Puisque les fonctions f et g sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^3$, et donc différentiables, et que $\nabla g = (10, 20, 100) \neq (0, 0, 0)$, on sait que le maximum cherché est un des points stationnaires du lagrangien

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = xy^2z^5 + \lambda(10x + 20y + 100z - 1000).$$

Ceux-ci sont solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y^2z^5 + 10\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2xyz^5 + 20\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 5xy^2z^4 + 100\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 10x + 20y + 100z - 1000 = 0 \end{cases}$$

Les trois premières équations conduisent à $x = y$ et $x = 2z$ et, injectant ces résultats dans la dernière, on obtient un unique point stationnaire de L pour lequel

$$(x,y,z) = \left(\frac{25}{2}, \frac{25}{2}, \frac{25}{4}\right) \in \mathtt{E} \qquad \text{et} \qquad f(x,y,z) = xy^2z^5 = \frac{5^{16}}{2^{13}}$$

Ce point appartenant à $\mathtt{E}$ et étant le seul point stationnaire de L, il correspond nécessairement à la satisfaction maximale.

Question IV

i. Par définition du rotationnel, on sait que

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

où on a introduit les composantes cartésiennes de $\mathbf{E} = E_x\mathbf{e}_x + E_y\mathbf{e}_y + E_z\mathbf{e}_z$.
Appliquant cette définition au champ vectoriel

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

il vient

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z\partial y}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}\right)\mathbf{e}_z\right] = \mathbf{0}$$

où l'égalité des dérivées partielles d'ordre 2 qui ne diffèrent que par l'ordre dans lequel les dérivées sont évaluées est réalisée si $V \in C_2(\mathbb{R}^3)$.

ii. La dérivée directionnelle de V dans une direction $\mathbf{d}$ s'écrit

$$D_{\mathbf{d}}V = \mathbf{d} \cdot \nabla V = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$$

Celle-ci est donc nulle si $\mathbf{d}$ est perpendiculaire au champ électrique $\mathbf{E}$.

iii. (a) Puisque

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

on a, $\forall (x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} = -\nabla V &= -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{e}_z \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathbf{e}_x - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathbf{e}_y \\
&= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_0}\frac{r_0 x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathbf{e}_x - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_0}\frac{r_0 y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\mathbf{e}_y\right] \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\,\mathbf{e}_x + \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{e}_y\right] \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y}{(x^2+y^2)}
\end{aligned}$$

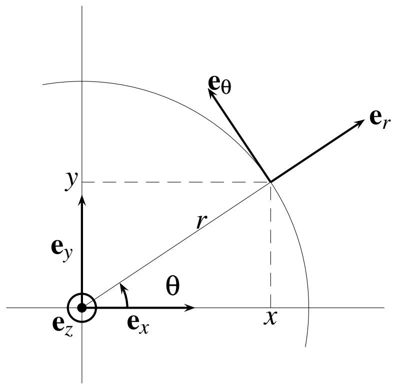
(b) On calcule aisément

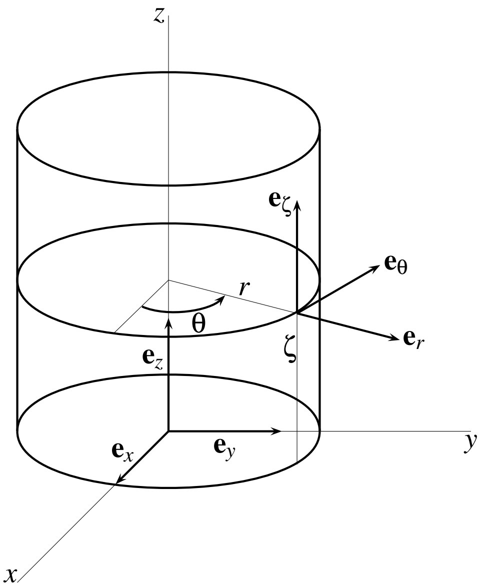
$$\begin{aligned}
\triangle V = \nabla \cdot \nabla V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_z}{\partial z} \\
&= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right] \\
&= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(x^2+y^2)-2x^2+(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = 0
\end{aligned}$$

(c) Repartant de l'expression du champ électrique

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y}{(x^2 + y^2)}$$

et introduisant les coordonnées cylindriques (voir figures) avec le fil électrique disposé sur l'axe OZ, on peut écrire





$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{e}_x = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_y = \sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r\cos\theta}{r^2}(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta) + \frac{r\sin\theta}{r^2}(\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta)\right] \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{e}_r}{r} \end{aligned}$$

On peut aussi directement remarquer que

$$\frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y}{(x^2+y^2)} = \frac{r\mathbf{e}_r}{r^2} = \frac{\mathbf{e}_r}{r}$$

de sorte que

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y}{(x^2+y^2)} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{e}_r}{r}$$