Janvier 2016

Université de Liège

MATH0002-4 - ANALYSE MATHÉMATIQUE
EXAMEN

Durée de l'épreuve : 4 heures.
Répondez aux différentes questions sur des feuilles séparées.
Indiquez sur chacune de vos feuilles vos nom, prénom, section et numéro d'ordre.
Rendez le carton avec votre numéro d'ordre en même temps que vos copies.

Question I

i. Définissez $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ où x_0 et a appartiennent à $\mathbb{R}$.

ii. En utilisant le théorème de Taylor, déterminez les coefficients α, β et γ tels que, pour toute fonction réelle $f \in C_3(\mathbb{R})$, on a

$$f''(x_0) = \alpha f(x_0 - \Delta x) + \beta f(x_0) + \gamma f(x_0 + 2\Delta x) + O(\Delta x), \qquad (\Delta x \to 0)$$

iii. Les fonctions $\mathrm{sh}\, x$, $\mathrm{ch}\, x$ et $\mathrm{th}\, x$ sont-elles linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$? Justifiez.

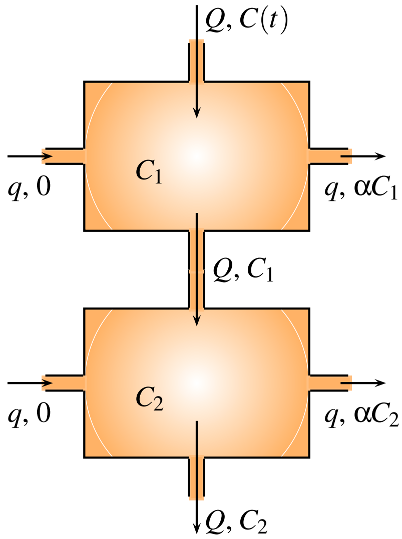
iv. Si $f \in C_2(\mathbb{R}^3)$ est stationnaire en x_0 et si la matrice hessienne $\mathsf{H}(\mathrm{x}_0)$ est semi-définie positive en ce point, peut-on en conclure que f présente un minimum local en x_0 ? Justifiez.

v. Montrez que si $\phi \in C_2(\mathbb{R}^3)$, alors $\nabla \wedge (\nabla \phi) = \mathbf{0}$.

Question II

On considère une colonne d'extraction, telle que schématisée ci-contre, dans laquelle un mélange liquide présentant une concentration $C(t)$ d'une substance est progressivement débarrassé de cette substance par un flux transversal d'un autre solvant. La colonne étudiée est constituée de deux cellules identiques, de volume V, et est traversée par un flux Q du mélange. Un flux transversal q du solvant est organisé dans chacune des cellules. On note α le coefficient de partition de la substance étudiée entre le solvant et le mélange circulant dans les cellules.

Sur cette base, les concentrations C_1 et C_2 dans les deux cellules sont décrites par les équations



$$\begin{cases} \dot{C}_1(t) = \eta C(t) - \xi\eta C_1(t) \\ \dot{C}_2(t) = \eta C_1(t) - \xi\eta C_2(t) \end{cases} \quad \text{où } \eta = \frac{Q}{V}, \quad \xi = \frac{\alpha q}{Q}$$

(ξ et η sont des constantes strictement positives) et où $(\dot{\ })$ désigne la dérivée par rapport au temps.

i. Si la concentration à l'entrée du système décroît selon $C(t) = C_0(1 - \eta t)$ pour $t \in [0, T]$ où $T = 1/\eta$, déterminez la concentration $C_2(T)$ à la sortie de la colonne à la fin de l'intervalle considéré dans le cas où $\xi = 2$ et où les conditions initiales sont telles que $C_0 = \xi C_1(0) = \xi^2 C_2(0)$.

ii. Dans le cas général, déterminez (sans la résoudre) une équation différentielle pour la seule inconnue $C_2(t)$, *i.e.* une équation différentielle décrivant la dynamique de $C_2(t)$ en fonction de $C(t)$ et des constantes ξ et η sans faire intervenir la concentration inconnue $C_1(t)$.
Exprimez les conditions initiales applicables à cette équation si on connaît $C_1(0)$ et $C_2(0)$.

Tournez la page.

Question III

Une compagnie aérienne accepte les bagages en cabine pour autant que ceux-ci soient de forme parallélépipédique et que leurs dimensions a, b et h soient telles que la somme $2a+2b+h$ des dimensions du périmètre de la base du bagage et de sa hauteur soit inférieure ou égale à 150 cm.

Déterminez le volume maximum des bagages admis en cabine par cette compagnie. Justifiez.

Question IV

On considère une pièce métallique occupant l'espace

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \ell,\ 0 < y < y_0 + \frac{x^2}{2p} \right\}$$

où ℓ, y_0 et p sont des constantes strictement positives. La pièce faisant partie d'un échangeur de chaleur destiné à refroidir un circuit électronique, on étudie la distribution de la température $T(x,y)$ dans celle-ci. Cette distribution est décrite par l'équation

$$\Delta T = 0 \qquad \text{sur } \Omega \tag{$\spadesuit$}$$

i. Étudiez la régularité du changement de variables défini par

$$\begin{cases} x = \xi \\ y = \eta(\xi^2 + 2py_0) \end{cases}$$

En particulier, déterminez l'image de Ω dans l'espace des coordonnées (ξ,η).

ii. Déterminez l'expression des opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}$ en fonction des variables indépendantes ξ et η.

iii. Exprimez la forme (trop compliquée pour offrir une approche de résolution efficace du problème) prise par l'équation ($\spadesuit$) en fonction des variables indépendantes ξ et η.

Question I

i. La limite de $f(x)$ quand x tend vers $x_0 \in \mathbb{R}$ est égale au nombre réel a, ce qui s'écrit

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

si et seulement si on peut rendre la différence entre $f(x)$ et a aussi petite que l'on veut en choisissant x suffisamment proche de x_0 soit, symboliquement, notant $\mathtt{E}$ le domaine de définition de f,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathtt{E}, 0 < |x - x_0| \leq \delta) : |f(x) - a| \leq \varepsilon$$

ii. Par la formule de Taylor, on sait que, puisque $f \in C_3([x_0 - \Delta x, x_0])$,

$$\begin{aligned} f(x_0 - \Delta x) &= f(x_0) + f'(x_0)(-\Delta x) + \frac{1}{2} f''(x_0)(-\Delta x)^2 + O\left(\Delta x^3\right) \\ &= f(x_0) - f'(x_0)\Delta x + \frac{1}{2} f''(x_0)\Delta x^2 + O\left(\Delta x^3\right), \qquad (\Delta x \to 0) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} f(x_0 + 2\Delta x) &= f(x_0) + f'(x_0)(2\Delta x) + \frac{1}{2} f''(x_0)(2\Delta x)^2 + O\left(\Delta x^3\right) \\ &= f(x_0) + 2f'(x_0)\Delta x + 2f''(x_0)\Delta x^2 + O\left(\Delta x^3\right), \qquad (\Delta x \to 0) \end{aligned}$$

En combinant les deux expressions, il vient

$$2f(x_0 - \Delta x) + f(x_0 + 2\Delta x) = 3f(x_0) + 3f''(x_0)\Delta x^2 + O\left(\Delta x^3\right), \qquad (\Delta x \to 0)$$

Dès lors,

$$f''(x_0) = \frac{2f(x_0 - \Delta x) - 3f(x_0) + f(x_0 + 2\Delta x)}{3\Delta x^2} + O(\Delta x), \qquad (\Delta x \to 0)$$

Cette expression correspond au résultat recherché avec

$$\alpha = \frac{2}{3\Delta x^2}, \qquad \beta = -\frac{1}{\Delta x^2} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{1}{3\Delta x^2}$$

iii. Les fonctions $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{th} x$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$ lorsque

$$C_1 \operatorname{sh} x + C_2 \operatorname{ch} x + C_3 \operatorname{th} x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{$\spadesuit$}$$

implique

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

Exprimant l'annulation de la combinaison linéaire ($\spadesuit$) successivement en $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$, il vient

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 \operatorname{sh} 1 + C_2 \operatorname{ch} 1 + C_3 \operatorname{th} 1 = 0 \\ C_1 \operatorname{sh} 2 + C_2 \operatorname{ch} 2 + C_3 \operatorname{th} 2 = 0 \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 \operatorname{sh} 1 + C_3 \operatorname{th} 1 = 0 \\ C_1 \operatorname{sh} 2 + C_3 \operatorname{th} 2 = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations possèdent la solution unique $C_1 = C_3 = 0$ si le déterminant de la matrice des coefficients du système est non nul, *i.e.* si

$$\Delta = \operatorname{sh} 1 \operatorname{th} 2 - \operatorname{sh} 2 \operatorname{th} 1 \neq 0$$

Ceci est bien le cas puisque

$$\Delta = \frac{\operatorname{sh} 1 \operatorname{sh} 2 \operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 2 \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} 2}{\operatorname{ch} 1 \operatorname{ch} 2} = \frac{\operatorname{sh} 1 \operatorname{sh} 2}{\operatorname{ch} 1 \operatorname{ch} 2}(\operatorname{ch} 1 - \operatorname{ch} 2) \neq 0$$

Dès lors, l'annulation de la combinaison linéaire ($\spadesuit$) conduit bien à celle des coefficients C_1, C_2 et C_3 et les fonctions $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{th} x$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

De façon alternative, on peut justifier l'indépendance des fonctions considérées en formant le Wronskien

$$W(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x & \operatorname{th} x \\ \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x & \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x & \dfrac{-2\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} \end{vmatrix}$$

En soustrayant la première ligne de la troisième, il vient

$$W(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x & \operatorname{th} x \\ \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x & \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\ 0 & 0 & \left(\dfrac{-2\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} - \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right) \end{vmatrix} = \operatorname{th} x \left(1 + \frac{2}{\operatorname{ch}^2 x}\right)$$

Puisque le Wronskien n'est pas identiquement nul sur $\mathbb{R}$ (il ne s'annule qu'en $x = 0$), on en déduit que les fonctions sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$.

iv. Si la matrice hessienne $\mathsf{H}(\mathsf{x}_0)$ est semi-définie positive en un point x_0 où la fonction f est stationnaire, on ne peut pas en déduire que f présente un minimum local en ce point.
Considérons par exemple la fonction $f(x,y,z) = -(x^4 + y^4 + z^4) \in C_2(\mathbb{R}^3)$. Cette fonction est stationnaire en $\mathsf{x}_0 = (0,0,0)$ puisque le gradient $\nabla f(\mathsf{x}_0)$ en ce point est nul, *i.e.*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathsf{x}_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathsf{x}_0) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(\mathsf{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_0^3 \\ -4y_0^3 \\ -4z_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice hessienne en x_0 est donnée par

$$\mathsf{H}(\mathsf{x}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathsf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathsf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\mathsf{x}_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathsf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathsf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\mathsf{x}_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(\mathsf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(\mathsf{x}_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\mathsf{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12x_0^2 & 0 & \\ 0 & -12y_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & -12z_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et est donc semi-définie positive.
Cependant, la fonction f ne présente pas un minimum en $\mathsf{x}_0 = (0,0,0)$ mais un maximum puisque

$$f(\mathsf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathsf{x} \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{tandis que} \qquad f(\mathsf{x}_0) = 0$$

L'énoncé proposé n'est donc pas vrai.

v. Par définition du rotationnel, on sait que

$$\nabla \wedge \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\mathbf{e}_z$$

Appliquant cette définition au champ vectoriel

$$\mathbf{f} = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

il vient

$$\nabla \wedge \mathbf{f} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}\right)\mathbf{e}_z = 0$$

où l'égalité des dérivées partielles d'ordre 2 qui ne diffèrent que par l'ordre dans lequel les dérivées sont évaluées résulte de l'hypothèse $\phi \in C_2(\mathbb{R}^3)$.

Question II

i. Dans le cas particulier considéré, le problème revient à déterminer la concentration $C_2(t)$ à la sortie de la colonne à la fin de l'intervalle $[0,T]$ lorsque le système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{C}_1(t) = \eta C_0(1-\eta t) - 2\eta C_1(t) \\ \dot{C}_2(t) = \eta C_1(t) - 2\eta C_2(t) \end{cases} \qquad t \in [0,T]$$

avec $T = 1/\eta$ et les conditions initiales $C_1(0) = C_0/2$, $C_2(0) = C_0/4$.

Résolution de la première équation

La première équation se réécrit, sous forme canonique,

$$\dot{C}_1(t) + 2\eta C_1(t) = \eta C_0(1-\eta t)$$

Elle est linéaire et non homogène. Sa solution générale $C_1(t)$ est donc la somme de la solution générale $C_1^h(t)$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière $C_1^p(t)$ de l'équation non homogène.

Solution générale de l'équation homogène associée

L'équation étant linéaire à coefficients constants, nous considérons le polynôme caractéristique associé $z+2\eta$ qui s'annule uniquement en $z=-2\eta$. La solution générale de l'équation homogène associée s'écrit donc

$$C_1^h(t) = A\,\mathrm{e}^{-2\eta t}$$

où A est une constante quelconque.

Solution particulière de l'équation non homogène

Le terme indépendant étant un polynôme de degré 1, c'est-à-dire de la forme exponentielle-polynôme, nous pouvons rechercher une solution particulière de la forme

$$C_1^p(t) = Bt + D$$

puisque 0 n'est pas une racine du polynôme caractéristique associé. Substituant cette expression dans l'équation considérée, nous obtenons

$$B + 2\eta(Bt + D) = \eta C_0 - \eta^2 C_0 t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\eta B = -\eta^2 C_0 \\ B + 2\eta D = \eta C_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} B = -\dfrac{1}{2}\eta C_0 \\ D = \dfrac{3}{4}C_0 \end{cases}$$

Une solution particulière de l'équation considérée est donc donnée par

$$C_1^p(t) = \frac{C_0}{4}(3 - 2\eta t).$$

Solution générale de l'équation non homogène

La solution générale $C_1(t)$ de la première équation du système différentiel considéré est

$$C_1(t) = A\,\mathrm{e}^{-2\eta t} + \frac{C_0}{4}(3 - 2\eta t)$$

Solution $C_1(t)$ correspondant aux conditions initiales données

La première condition initiale donnée permet de déterminer A : nous avons

$$C_1(0) = \frac{C_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A + \frac{3}{4}C_0 = \frac{1}{2}C_0 \quad \Leftrightarrow \quad A = -\frac{C_0}{4}$$

Ainsi, la solution C_1 du problème différentiel considéré est donnée par

$$C_1(t) = -\frac{C_0}{4}\mathrm{e}^{-2\eta t} + \frac{C_0}{4}(3 - 2\eta t).$$

Résolution de la seconde équation

Tenant compte de ces informations, la seconde équation du système différentiel se réécrit, sous forme canonique,

$$\dot{C}_2(t) + 2\eta C_2(t) = \frac{1}{4}\eta C_0(3 - 2\eta t - \mathrm{e}^{-2\eta t})$$

Solution générale de l'équation homogène associée

Il s'agit à nouveau d'une équation linéaire non homogène.
L'équation homogène associée étant identique à celle de la première équation, sa solution générale s'écrit

$$C_2^h(t) = \tilde{A}\,\mathrm{e}^{-2\eta t}$$

où $\tilde{A}$ est une constante quelconque.

Solution particulière de l'équation non homogène

Comme le terme indépendant peut s'écrire sous la forme $f_1(t)+f_2(t)$ où

$$f_1(t)=\frac{1}{4}\eta C_0(3-2\eta t) \qquad \text{et} \qquad f_2(t)=-\frac{1}{4}\eta C_0\,\mathrm{e}^{-2\eta t}$$

et comme l'équation est linéaire, nous pouvons rechercher une solution particulière de la forme

$$C_2^p(t)=C_2^{p_1}+C_2^{p_2}$$

où $C_2^{p_i}$ est une solution particulière de l'équation $\dot{C}_2+2\eta C_2=f_i$ ($i=1,2$).

- Comme f_1 est un polynôme de degré 1, c'est-à-dire de la forme exponentielle-polynôme, nous pouvons rechercher une solution particulière de $\dot{C}_2+2\eta C_2=f_1$ de la forme

  $$C_2^{p_1}(t)=Et+F$$

  puisque 0 n'est pas une racine du polynôme caractéristique associé. Substituant cette expression dans l'équation considérée, nous obtenons

  $$E+2\eta(Et+F)=\eta\frac{C_0}{4}(3-2\eta t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\eta E=-\frac{1}{2}\eta^2C_0 \\ E+2\eta F=\frac{3}{4}\eta C_0 \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} E=-\frac{1}{4}\eta C_0 \\ F=\frac{1}{2}C_0 \end{cases}$$

  Une solution particulière de l'équation considérée est donc donnée par

  $$C_2^{p_1}(t)=\frac{C_0}{4}(2-\eta t).$$

- Comme $f_2(t)$ est de la forme exponentielle-polynôme, nous pouvons rechercher une solution particulière de $\dot{C}_2+2\eta C_2=f_2$ de la forme

  $$C_2^{p_2}(t)=Gt\,\mathrm{e}^{-2\eta t}$$

  puisque -2η est une racine simple du polynôme caractéristique associé. Nous calculons alors

  $$\dot{C}_2^{p_2}(t)=(G-2\eta Gt)\,\mathrm{e}^{-2\eta t}$$

  Substituant ces expressions dans l'équation considérée, nous obtenons

  $$(G-2\eta Gt)\,\mathrm{e}^{-2\eta t}+2\eta Gt\,\mathrm{e}^{-2\eta t}=-\eta\frac{C_0}{4}\,\mathrm{e}^{-2\eta t} \qquad \text{soit} \qquad G=-\frac{1}{4}\eta C_0$$

  Ainsi, une solution particulière est

  $$C_2^{p_2}(t)=-\frac{1}{4}\eta C_0 t\,\mathrm{e}^{-2\eta t}$$

Solution générale de l'équation non homogène

La solution générale C_2 de la seconde équation du système différentiel considéré s'écrit dès lors

$$C_2(t)=\tilde{A}\,\mathrm{e}^{-2\eta t}+\frac{C_0}{4}(2-\eta t)-\eta\frac{C_0}{4}t\,\mathrm{e}^{-2\eta t}=\tilde{A}\,\mathrm{e}^{-2\eta t}+\frac{C_0}{4}(2-\eta t-\eta t\,\mathrm{e}^{-2\eta t})\,.$$

Solution $C_2(t)$ correspondant aux conditions initiales données

La seconde condition initiale permet de déterminer $\tilde{A}$: nous avons

$$C_2(0) = \frac{C_0}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A} + \frac{1}{2}C_0 = \frac{1}{4}C_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A} = -\frac{1}{4}C_0$$

et la solution C_2 du problème différentiel considéré est donc donnée par

$$C_2(t) = \frac{1}{4}C_0(2 - \eta t - \mathrm{e}^{-2\eta t} - \eta t\, \mathrm{e}^{-2\eta t})$$

Concentration C_2 à la fin de l'intervalle de temps considéré

La concentration C_2 à la sortie de la colonne à la fin de l'intervalle $[0,T]$ est donnée par

$$C_2(T) = C_2\left(\frac{1}{\eta}\right) = \frac{1}{4}C_0\left(1 - \frac{2}{\mathrm{e}^2}\right)$$

ii. En dérivant la seconde équation du système différentiel donné, nous obtenons

$$\ddot{C}_2(t) = \eta \dot{C}_1(t) - \xi\eta \dot{C}_2(t)$$

Dès lors, en remplaçant $\dot{C}_1$ par l'expression donnée par la première équation et C_1 par $(\dot{C}_2 + \xi\eta C_2)/\eta$ (donné par la seconde), nous obtenons l'équation différentielle

$$\ddot{C}_2(t) + \xi\eta \dot{C}_2(t) = \eta\left[\eta C(t) - \xi\Big(\dot{C}_2(t) + \xi\eta C_2(t)\Big)\right]$$

ou, de façon équivalente,

$$\ddot{C}_2(t) + 2\xi\eta \dot{C}_2(t) + \xi^2\eta^2 C_2(t) = \eta^2 C(t)$$

soit une équation linéaire à coefficients constants d'ordre 2 en $C_2(t)$.
Par ailleurs, si nous disposons des conditions initiales $C_1(0) = C_1^0$ et $C_2(0) = C_2^0$ pour le système différentiel donné, alors nous déduisons de la seconde équation de ce système que

$$\dot{C}_2(0) = \eta C_1(0) - \xi\eta C_2(0) = \eta C_1^0 - \xi\eta C_2^0$$

Par conséquent, nous aboutissons au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \ddot{C}_2(t) + 2\xi\eta \dot{C}_2(t) + \xi^2\eta^2 C_2(t) = \eta^2 C(t) \\ C_2(0) = C_2^0 \\ \dot{C}_2(0) = \eta C_1^0 - \xi\eta C_2^0 \end{cases}$$

où C_1^0 et C_2^0 sont des constantes.

Question III

Le problème consiste en la recherche du maximum du volume $f(a,b,h) = abh$ du bagage parallélépipédique sur le domaine admissible

$$\mathtt{K} = \left\{(a,b,h) \in R^3 : a,b,h \geq 0,\ g(a,b,h) = 2a + 2b + h \leq 150\right\}$$

où toutes les dimensions a, b et h sont exprimées en centimètres.

Remarquons que le maximum existe puisque $f \in C_0(\mathtt{K})$ et que toute fonction continue sur un compact réalise sa borne supérieure sur ce compact.

Recherchons d'abord le maximum à l'intérieur du domaine admissible, *i.e.* sur

$$\mathring{\mathtt{K}} = \left\{(a,b,h) \in R^3 : a,b,h > 0,\ g(a,b,h) = 2a + 2b + h < 150\right\}$$

Puisque $f \in C_\infty(\mathring{K})$ le maximum recherché, s'il existe, ne peut être qu'un point stationnaire de f, *i.e.* une solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a} = bh = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial b} = ah = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial h} = ab = 0 \end{cases}$$

Les solutions requièrent l'annulation d'au moins deux dimensions du bagage et n'appartiennent pas à $\mathring{K}$. On en conclut que le maximum recherché appartient à la frontière de K.

Le volume du bagage est nul si une des dimensions est égale à zéro. Dès lors, le maximum recherché ne peut être situé sur les frontières de K définies par $a = 0$, $b = 0$ ou $h = 0$.

Comme le bon sens nous invite à le penser, le maximum recherché appartient donc à la frontière de K définie par l'égalité $g(a,b,h) = 2a+2b+h = 150$. On doit donc résoudre un problème d'optimisation avec contrainte d'égalité.

PREMIÈRE MÉTHODE DE RÉSOLUTION

Puisque les fonctions f et g sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^3$, et donc différentiables, et que $\nabla g = (2,2,1) \neq (0,0,0)$ on sait que le maximum recherché est un des points stationnaires du lagrangien

$$L(a,b,h,\lambda) = abh + \lambda(2a+2b+h-150)$$

Ceux-ci sont les solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial a} = bh + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial b} = ah + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial h} = ab + \ \ \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 2a+2b+h-150 = 0 \end{cases}$$

Les points stationnaires pour lesquels une des dimensions s'annule ne peuvent conduire au maximum recherché puisque le volume correspondant est nul.

Considérant que les dimensions a, b et h diffèrent de zéro, les trois premières équations conduisent à $b = a$ et $h = 2a$. Injectant ce résultat dans la troisième équation, on obtient

$$a = b = 25 \text{ cm} \qquad h = 50 \text{ cm}$$

qui correspondent à un bagage de volume

$$f(a,b,h) = abh = 31\,250 \text{ cm}^3$$

Puisque cette valeur est le plus grand volume associé aux points stationnaires du lagrangien (le volume correspondant aux autres points stationnaires étant nul), que le maximum existe et que la solution recherchée correspond nécessairement à un point stationnaire de L, on en déduit que les dimensions du bagage le plus volumineux admissible en cabine sont bien de $a = b = 25$ cm et $h = 50$ cm.

SECONDE MÉTHODE DE RÉSOLUTION

En utilisant la contrainte $2a+2b+h = 150$, on peut exprimer la dimension h en fonction des deux autres, *i.e.*

$$h = 150 - 2a - 2b$$

et utiliser ce résultat pour exprimer le volume du bagage en fonction des seules variables a et b. On a

$$F(a,b) \equiv f(a,b,150-2a-2b) = ab(150-2a-2b)$$

Le problème étant maintenant non contraint, si on excepte les contraintes de positivité sur les dimensions du bagage, on recherche les points stationnaires de F, *i.e.* les solutions de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = b(150-2a-2b) - 2ab = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = a(150-2a-2b) - 2ab = 0 \end{cases}$$

Les solutions correspondant à $a = 0$, $b = 0$ ou $150 - 2a - 2b = h = 0$ ne peuvent conduire au maximum recherché puisque le volume y associé est nul.

Considérant donc que les dimensions a, b et h diffèrent de zéro, on déduit des deux équations que $a = b$. En injectant ce résultat dans la première équation, il vient, après simplification

$$150 - 6a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 25$$

Les dimensions correspondantes sont donc

$$a = b = 25 \text{ cm} \qquad h = 50 \text{ cm}$$

et conduisent à un bagage de volume

$$F(a,b) = 31\,250 \text{ cm}^3$$

Puisque cette valeur est le plus grand volume associé aux points stationnaires de F, que le maximum existe et que la solution recherchée correspond nécessairement à un point stationnaire de F, on en déduit que les dimensions du bagage le plus volumineux admissible en cabine sont bien de $a = b = 25$ cm et $h = 50$ cm.

De façon alternative, on peut justifier le fait que $(a,b) = (25,25)$ correspond bien à un maximum de F en formant la matrice hessienne

$$\mathsf{H}(25,25) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial a^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial b \partial a} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial b^2} \end{pmatrix}_{(a,b)=(25,25)}$$

$$= \begin{pmatrix} -4b & 150 - 4a - 4b \\ 150 - 4a - 4b & -4a \end{pmatrix}_{(a,b)=(25,25)} = -50 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et en constatant que celle-ci est définie négative puisque, par application du critère de Sylvester à la matrice apparaissant dans le membre de droite, on a

$$\left|2\right| = 2 > 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

Ceci montre seulement que le point stationnaire identifié correspond à un maximum local de F. Pour conclure qu'il s'agit bien du maximum global recherché sur $\mathtt{K}$, il suffit de remarquer que le maximum global est nécessairement le plus grand des maxima locaux et de noter que, dans le cas présent, il n'y a qu'un seul maximum local.

Question IV

i. Les relations

$$\begin{cases} x = \xi \\ y = \eta(\xi^2 + 2py_0) \end{cases}$$

sont indéfiniment continûment dérivables sur $\mathbb{R}^2$, elles appartiennent donc au moins à $C_1(\Omega)$.
De plus, on peut les inverser en

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = \dfrac{y}{x^2 + 2py_0} \end{cases}$$

puisque $x^2 + 2py_0 \neq 0$ vu les hypothèses imposées à p et y_0. Le changement de variables est donc bijectif entre Ω et

$$\Omega' = \left\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : |\xi| < \ell,\ 0 < \eta(\xi^2 + 2py_0) < y_0 + \frac{\xi^2}{2p} \right\}$$

$$= \left\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : |\xi| < \ell,\ 0 < \eta < \frac{1}{2p} \right\}$$

Le jacobien de ce changement de variables

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2\xi\eta & \xi^2 + 2py_0 \end{vmatrix} = \xi^2 + 2py_0$$

est non nul vu les hypothèses imposées à p et y_0.

ii. Pour étudier l'effet du changement de variables sur les opérateurs de dérivation, nous partons des relations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \dfrac{\partial}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \dfrac{\partial}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \dfrac{\partial}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{cases}$$

qui deviennent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial \xi} - \dfrac{2\xi\eta}{(\xi^2 + 2py_0)} \dfrac{\partial}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{1}{(\xi^2 + 2py_0)} \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{cases}$$

iii. L'équation $\Delta T = 0$ s'exprimant sous la forme

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

il nous faut déterminer les expressions des opérateurs $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

On obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{2\xi\eta}{(\xi^2+2py_0)}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{2\xi\eta}{(\xi^2+2py_0)}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{2\xi\eta}{(\xi^2+2py_0)}\frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{2\xi\eta}{(\xi^2+2py_0)}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \\
&\quad + \frac{2\xi\eta}{(\xi^2+2py_0)}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{2\xi\eta}{(\xi^2+2py_0)}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{2\xi\eta}{(\xi^2+2py_0)}\frac{\partial^2}{\partial \eta\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{2\xi\eta}{\xi^2+2py_0}\right)\frac{\partial}{\partial \eta} - \left(\frac{2\xi\eta}{\xi^2+2py_0}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta} \\
&\quad + \frac{2\xi\eta}{(\xi^2+2py_0)}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{2\xi\eta}{\xi^2+2py_0}\right)\frac{\partial}{\partial \eta} + \left(\frac{2\xi\eta}{\xi^2+2py_0}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{4\xi\eta}{\xi^2+2py_0}\frac{\partial^2}{\partial \eta\partial \xi} - \left(\frac{2\eta\cdot(\xi^2+2py_0) - 2\xi\eta\cdot 2\xi}{(\xi^2+2py_0)^2}\right)\frac{\partial}{\partial \eta} \\
&\quad + \frac{2\xi\eta}{(\xi^2+2py_0)}\cdot\left(\frac{2\xi}{\xi^2+2py_0}\right)\frac{\partial}{\partial \eta} + \left(\frac{2\xi\eta}{\xi^2+2py_0}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{4\xi\eta}{(\xi^2+2py_0)}\frac{\partial^2}{\partial \eta\partial \xi} + \left(\frac{2\eta(3\xi^2-2py_0)}{(\xi^2+2py_0)^2}\right)\frac{\partial}{\partial \eta} + \left(\frac{2\xi\eta}{\xi^2+2py_0}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\frac{1}{(\xi^2+2py_0)}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(\frac{1}{(\xi^2+2py_0)}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \\
&= \frac{1}{(\xi^2+2py_0)^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}
\end{aligned}
$$

de sorte que l'équation $\Delta T = 0$ devient

$$
\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - \frac{4\xi\eta}{(\xi^2+2py_0)}\frac{\partial^2 T}{\partial \eta\partial \xi} - \left(\frac{2\eta(3\xi^2-2py_0)}{(\xi^2+2py_0)^2}\right)\frac{\partial T}{\partial \eta} + \left(\frac{2\xi\eta}{(\xi^2+2py_0)}\right)^2\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \frac{1}{(\xi^2+2py_0)^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = 0
$$

ou, de façon équivalente,

$$
\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} - \frac{4\xi\eta}{(\xi^2+2py_0)}\frac{\partial^2 T}{\partial \eta\partial \xi} - \left(\frac{2\eta(3\xi^2-2py_0)}{(\xi^2+2py_0)^2}\right)\frac{\partial T}{\partial \eta} + \left(\frac{4\xi^2\eta^2+1}{(\xi^2+2py_0)^2}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = 0
$$